第4章 电路定理

（Circuit Theorems）

4.1　叠加定理 (*Superposition Theorem*)

4.3　戴维宁定理和诺顿定理
(*Thevenin-Norton Theorem*)

● 重点：

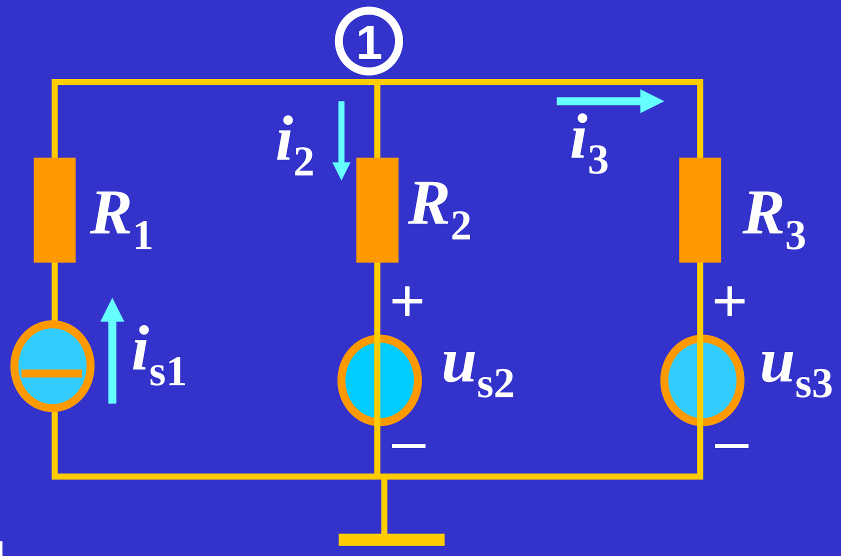
掌握各定理的内容、适用范围及如何应用；

4.1　叠加定理
(Superposition Theorem)

1. 叠加定理

在线性电路中，任一支路的电流(或电压)可以看成是电路中每一个独立电源单独作用于电路时，在该支路产生的电流(或电压)的代数和。

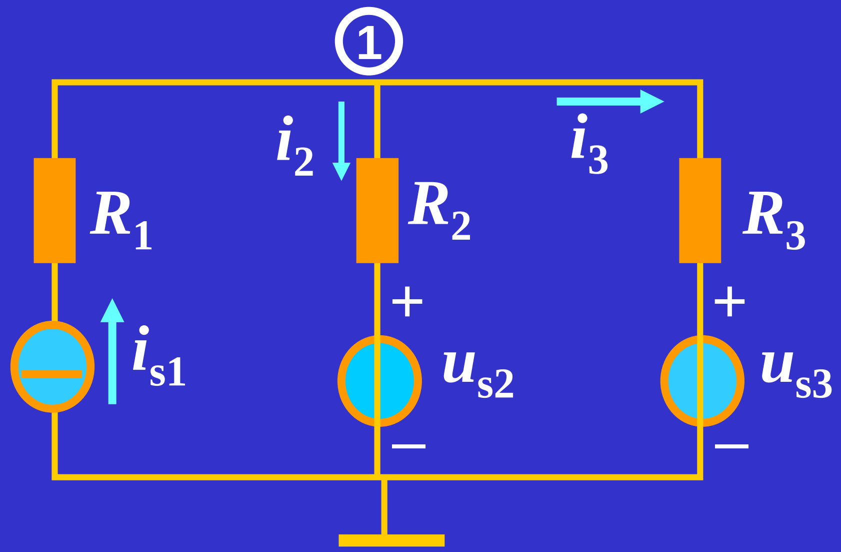
2 .定理的证明



用结点法:

$$(G_2+G_3)u_{n1}=G_2u_{s2}+G_3u_{s3}+i_{S1}$$

$$u_{n1}=\frac{G_2u_{s2}}{G_2+G_3}+\frac{G_3u_{s3}}{G_2+G_3}+\frac{i_{s1}}{G_2+G_3}$$



或表示为:

$$u_{n1}=a_1i_{s1}+a_2u_{s2}+a_3u_{s3}$$
$$=u_{n1}^{(1)}+u_{n2}^{(2)}+u_{n3}^{(3)}$$

支路电流为:

$$i_2=\frac{u_{n1}-u_{s2}}{R_2}=\left(\frac{G_2}{G_2+G_3}-\frac{1}{R_2}\right)u_{s2}+\frac{G_3u_{s3}}{G_2+G_3}+\frac{i_{s1}}{G_2+G_3}$$
$$=b_1i_{s1}+b_2u_{s2}+b_3u_{s3}=i_2^{(1)}+i_2^{(2)}+i_2^{(3)}$$

$$i_3=\frac{u_{n1}-u_{s3}}{R_3}=\left(\frac{G_2}{G_2+G_3}\right)u_{s2}+\left(\frac{G_3}{G_2+G_3}-\frac{1}{R_3}\right)u_{s3}+\frac{i_{s1}}{G_2+G_3}$$
$$=i_3^{(1)}+i_3^{(2)}+i_3^{(3)}$$

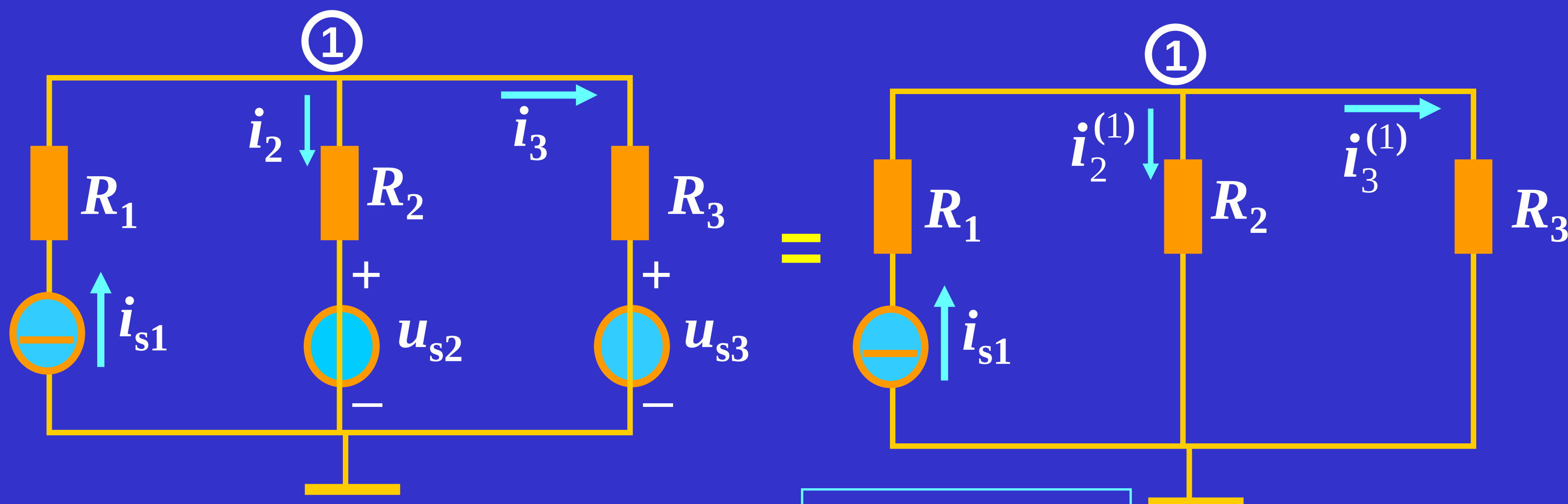
结论 结点电压和支路电流均为各电源的一次函数，均可看成各独立电源单独作用时，产生的响应之叠加。

3. 几点说明

1. 叠加定理只适用于线性电路。
2. 一个电源作用，其余电源为零

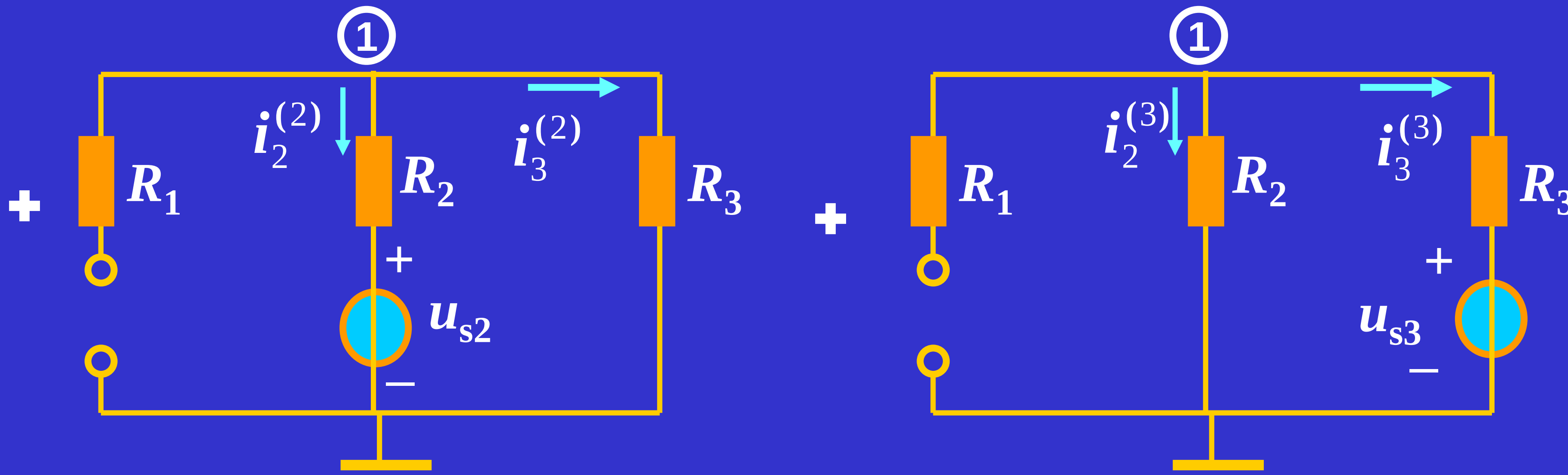
电压源为零—短路。

电流源为零—开路。



三个电源共同作用

i_{s1}单独作用



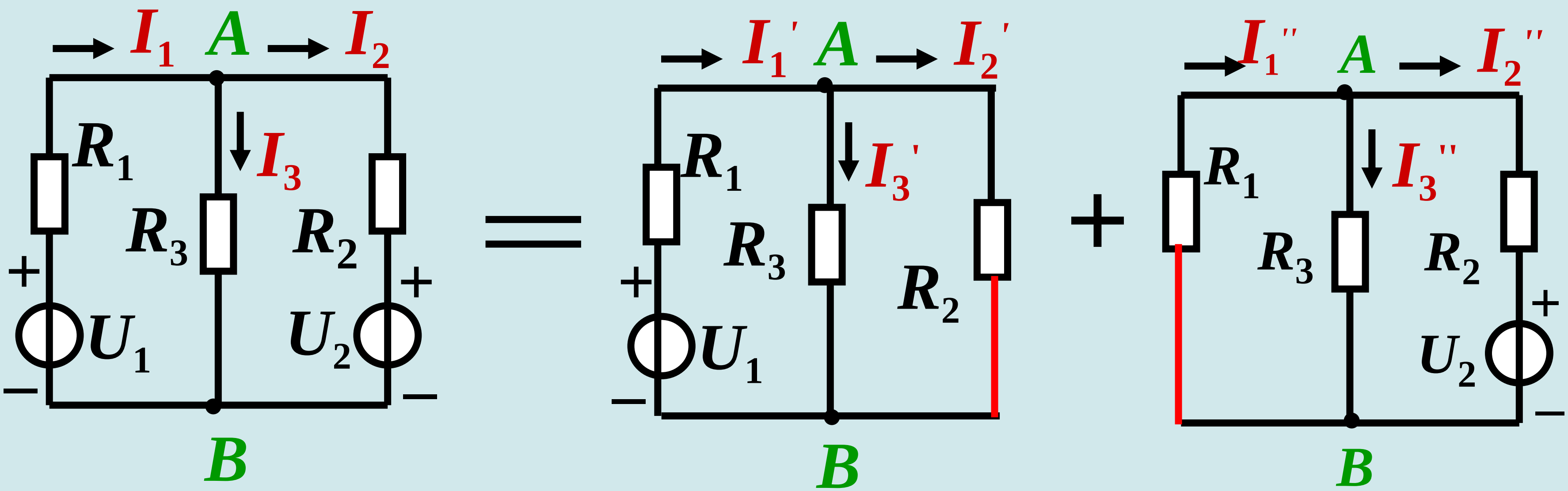
u_{s2}单独作用　　　　u_{s3}单独作用

3. 功率不能叠加(功率为电压和电流的乘积，为电源的二次函数)。

4. u, i叠加时要注意各分量的参考方向。

5. 含受控源(线性)电路亦可用叠加，但叠加只适用于独立源，受控源应始终保留。

叠加原理：

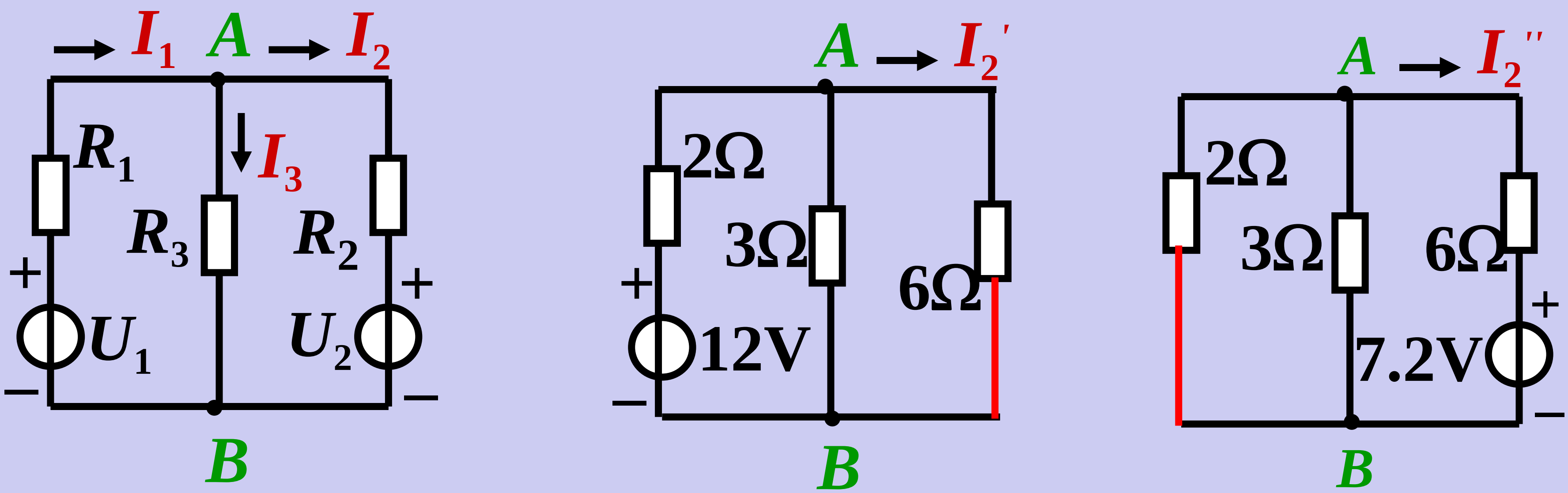


原电路　　　　U_1单独作用　　　　U2单独作用

$$I_1 = I_1' + I_1'' \qquad I_2 = I_2' + I_2'' \qquad I_3 = I_3' + I_3''$$

“恒压源不起作用”或“令其等于0”，即是将此恒压源去掉，代之以导线连接。

例1：用叠加原理求I_2



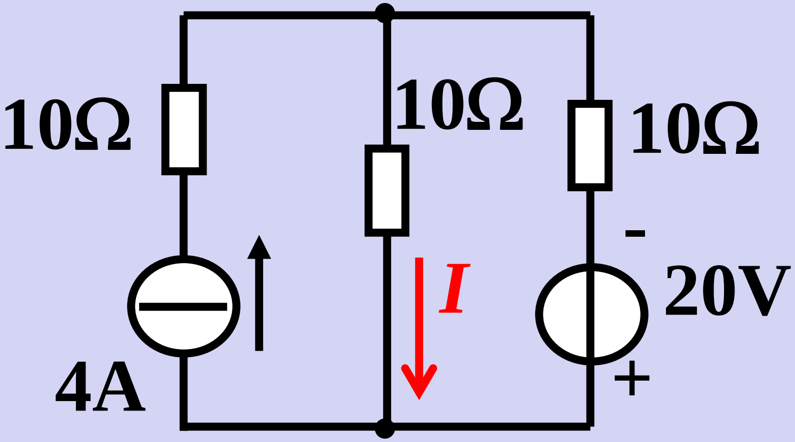
已知：U_1=12V， U_2=7.2V， R_1=2Ω， R_2=6Ω， R_3=3Ω

根据叠加原理，$I_2 = I_2' + I_2''$

解： $I_2' = \quad 1A$

$I_2'' = \quad -1A$

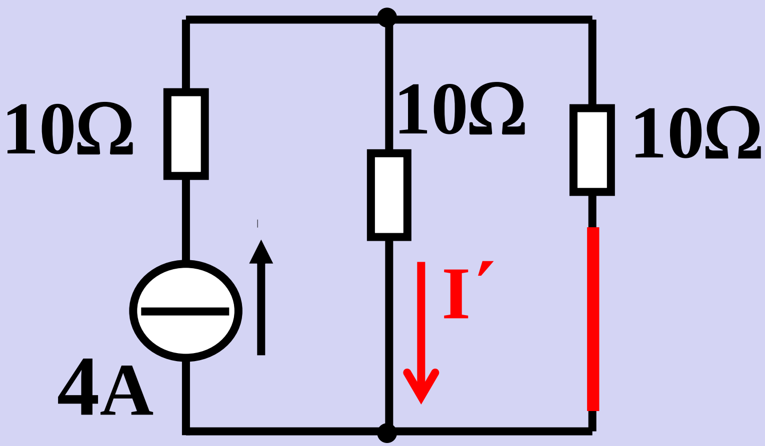
$I_2 = I_2' + I_2'' = \quad 0A$



例2：用叠加原理求：I= ?

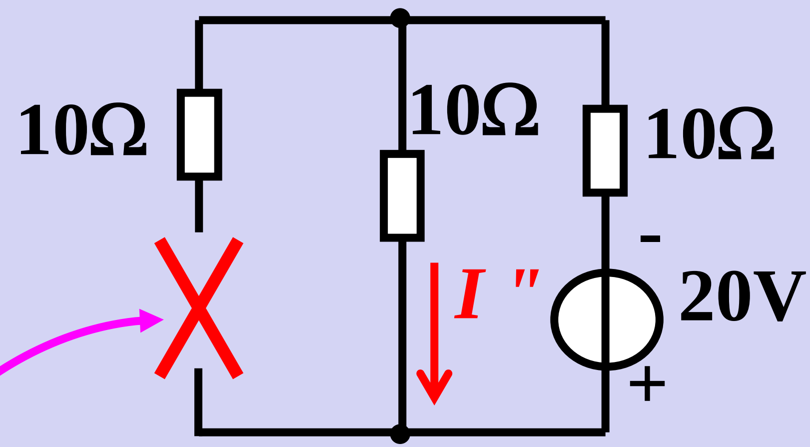
$$\boxed{I = I' + I'' = 1\text{A}}$$

解：



I'=2A

+

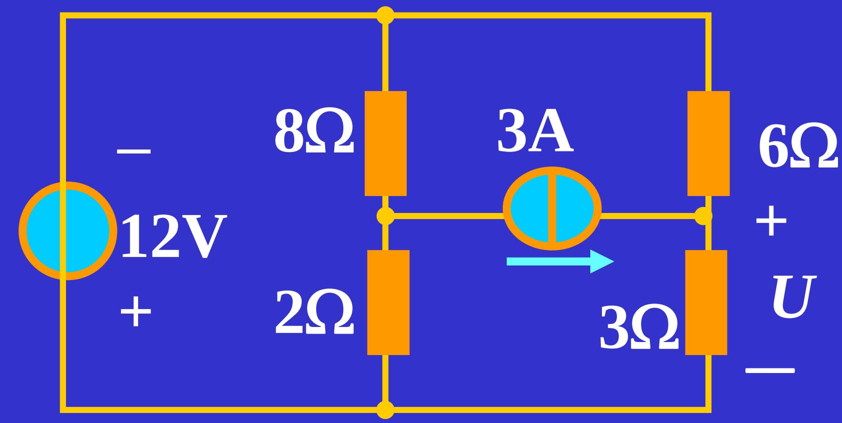


I''= -1A

“恒流源不起作用”或“令其等于0”，即是将此恒流源去掉，使电路开路。

4. 叠加定理的应用

例1 求电压U.

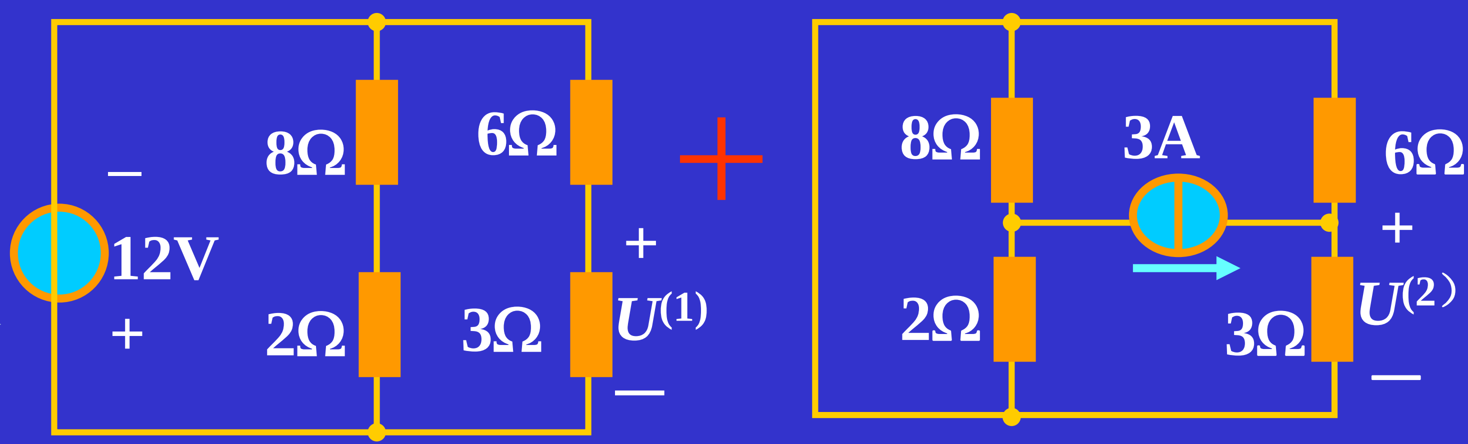


解

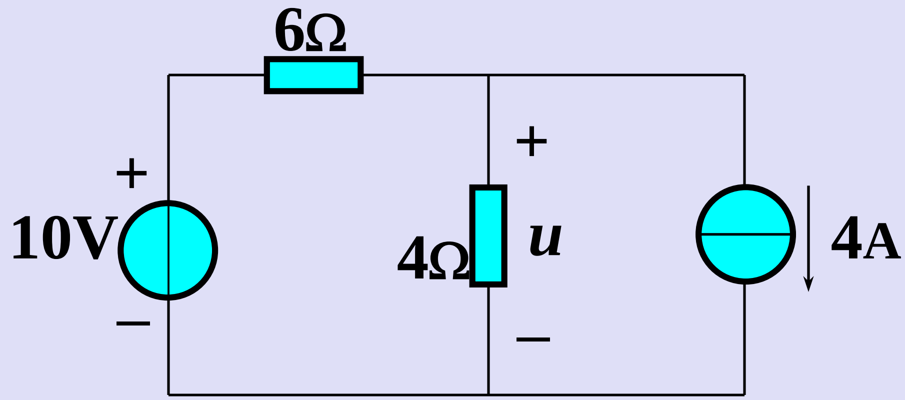
12V电源作用： $U^{(1)} = -\frac{12}{9}\times 3 = -4V$

3A电源作用： $U^{(2)} = (6//3)\times 3 = 6V$ $U = -4+6 = 2V$

画出分电路图



例3：求图中电压u。



解：

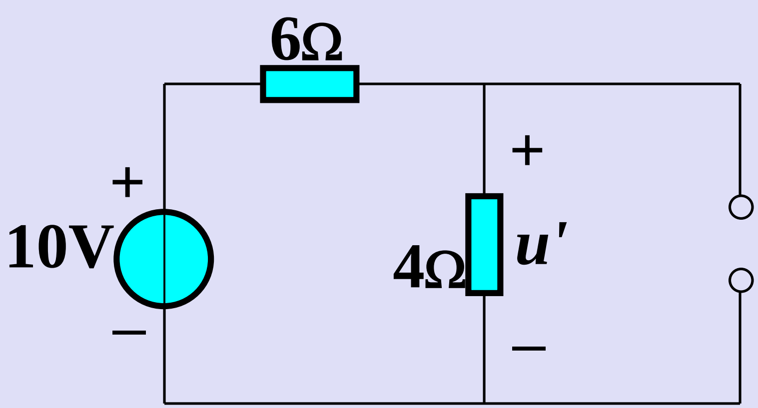
(1) 10V电压源单独作用，4A电流源开路

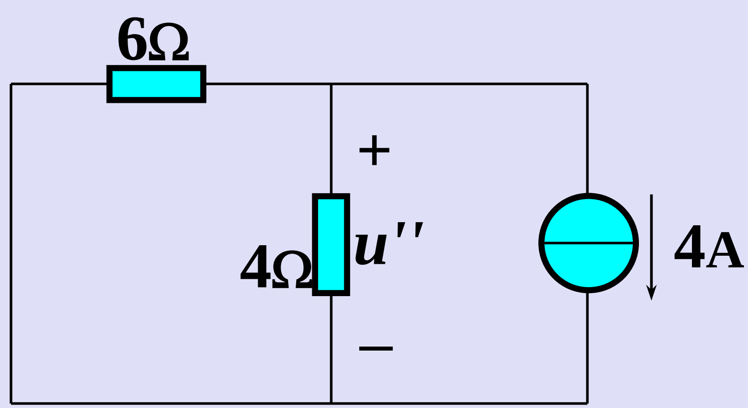
$u' = 4\text{V}$

(2) 4A电流源单独作用，10V电压源短路

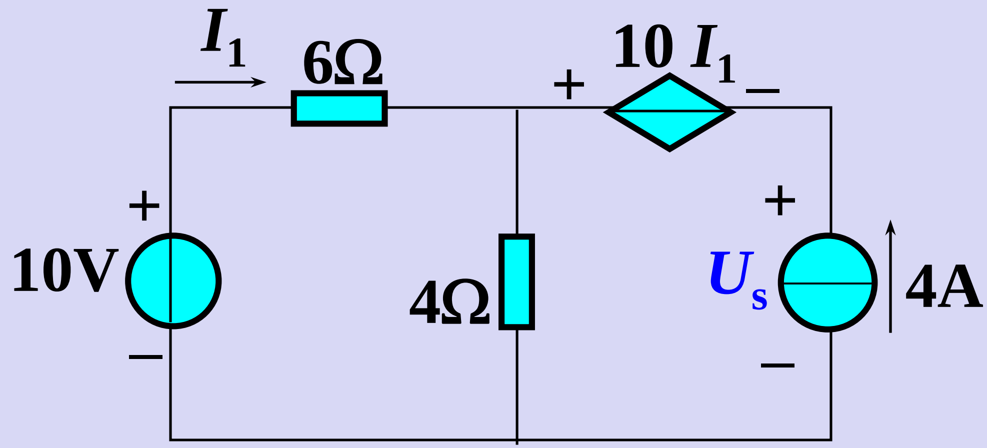
$u'' = -4\times 2.4 = -9.6\text{V}$

共同作用：$u = u' + u'' = 4 + (-9.6) = -5.6\text{V}$



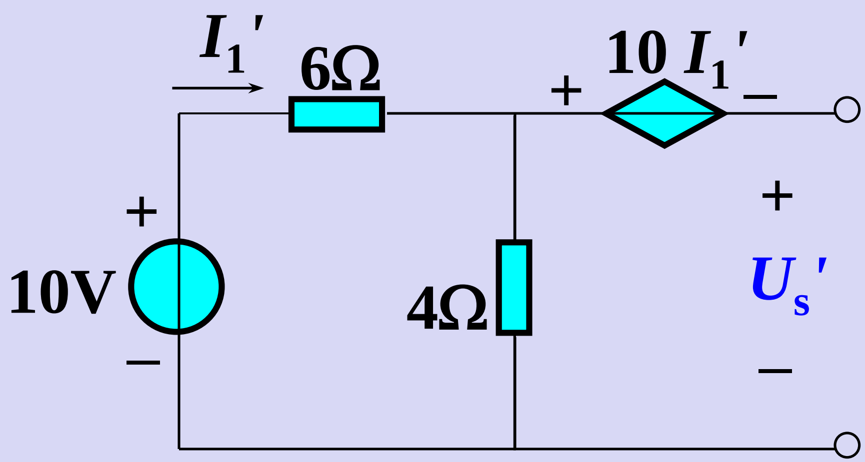


例4. 求电压U_s。

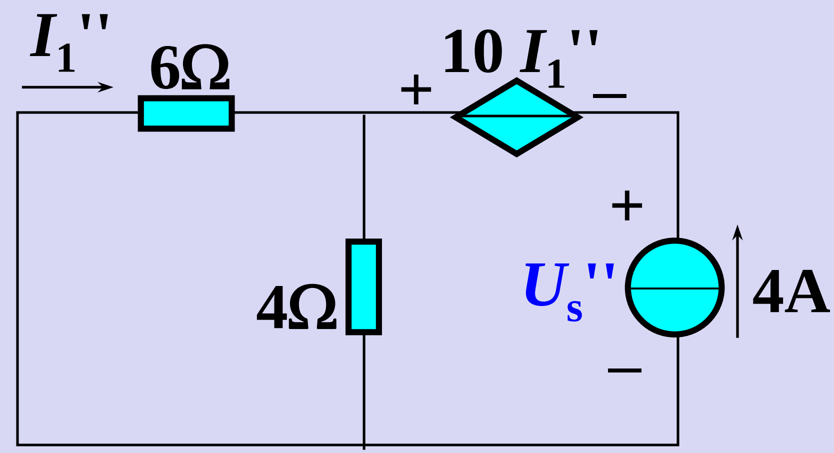


解:

(1) 10V电压源单独作用：



(2) 4A电流源单独作用：



$U_s' = -10I_1' + 4 = -10\times 1 + 4 = -6\text{V}$

$U_s'' = -10I_1'' + 2.4\times 4$

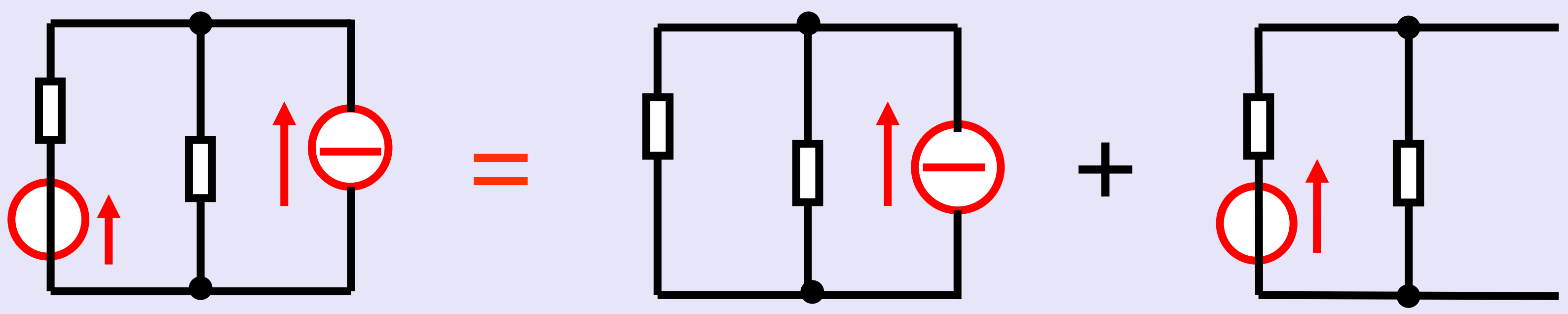
$= -10\times(-1.6) + 9.6 = 25.6\text{V}$

共同作用：$U_s = U_s' + U_s'' = -6 + 25.6 = 19.6\text{V}$

应用叠加定理要注意的问题

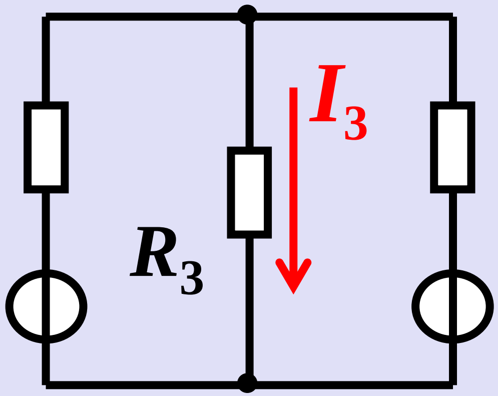
1. 叠加定理只适用于线性电路。

2. 叠加时只将电源分别考虑，电路的结构和参数不变。
暂时不予考虑的恒压源应予以短路，即令U=0；
暂时不予考虑的恒流源应予以开路，即令 I_s=0。



3. 解题时要标明各支路电流、电压的正方向。原电路中各电压、电流的最后结果是各分电压、分电流的代数和。

4. 叠加原理只能用于电压或电流的计算，不能用来求功率，即功率不能叠加。如：

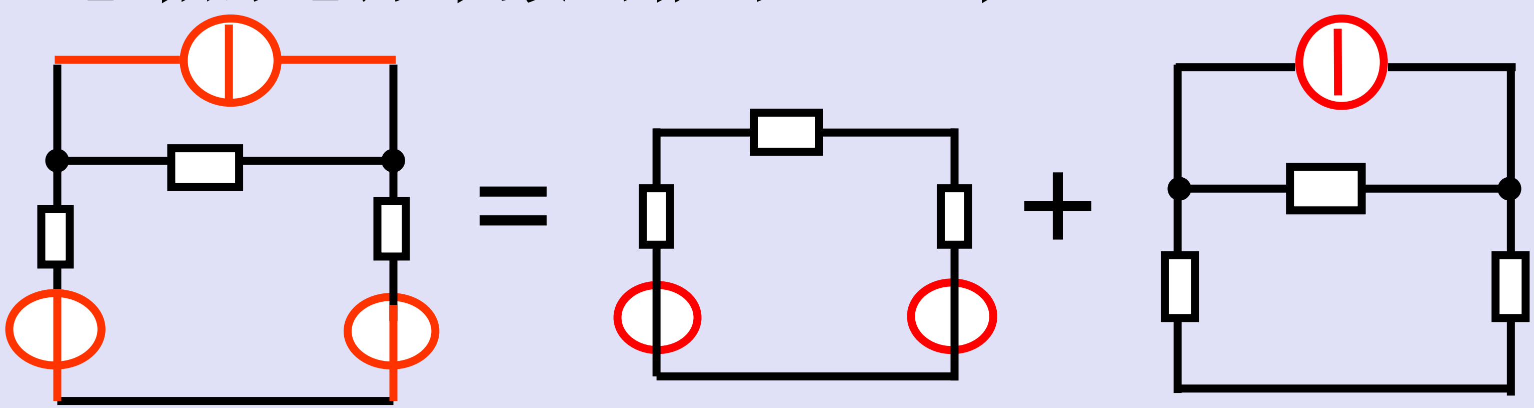


设：$I_3 = I_3' + I_3''$

则：$P_3 = I_3^{\,2} R_3 = (I_3' + I_3'')^2 R_3$

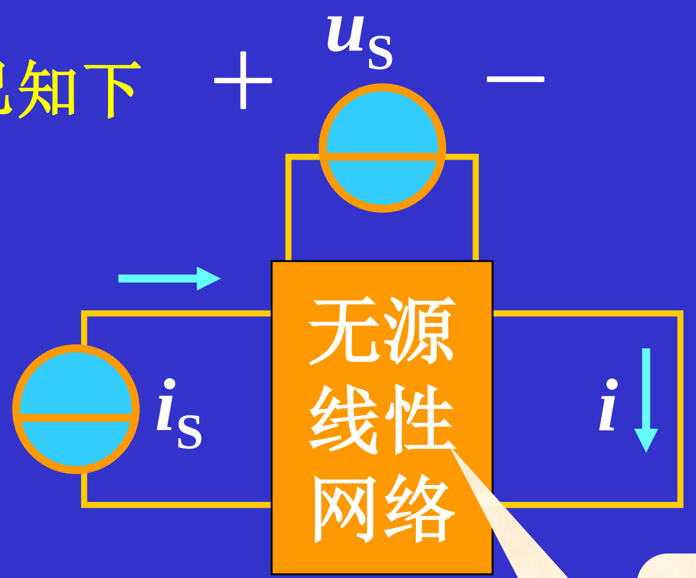
$$\neq (I_3')^2 R_3 + (I_3'')^2 R_3$$

5. 运用叠加定理时也可以把电源分组求解，每个分电路的电源个数可能不止一个。



6. 电源指的是独立源，受控源应保留在分电路中。

例5 封装好的电路如图，已知下列实验数据：



当 $u_S = 1V$， $i_S = 1A$ 时，

响应 $i = 2A$

当 $u_S = -1V$， $i_S = 2A$ 时，

响应 $i = 1A$

求 $u_S = -3V$， $i_S = 5A$ 时，响应 $i = ?$

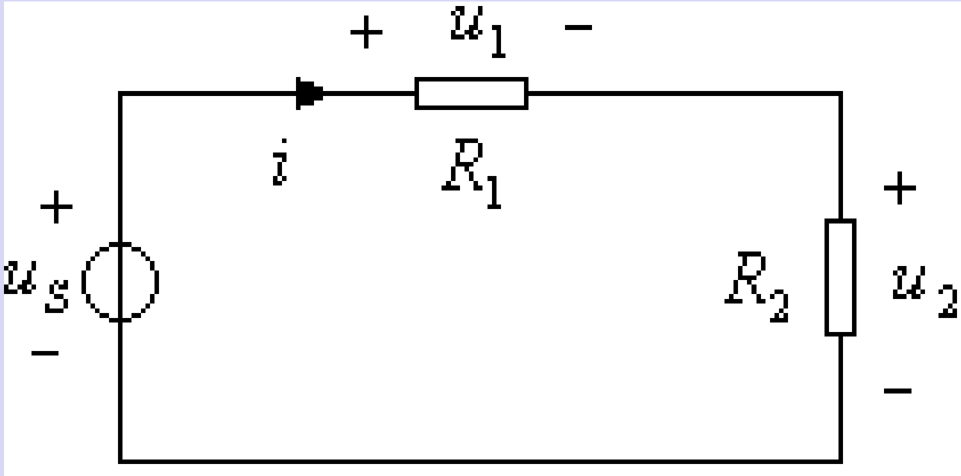
研究激励和响应关系的实验方法

解 根据叠加定理，有： $i = k_1 i_S + k_2 u_S$

代入实验数据，得： $\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ 2k_1 - k_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$

$$i = u_S + i_S = -3 + 5 = 2A$$

三、齐性定理



$$
\begin{cases}
i = \dfrac{1}{R_1 + R_2} u_S \\
u_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} u_S \\
u_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} u_S
\end{cases}
$$

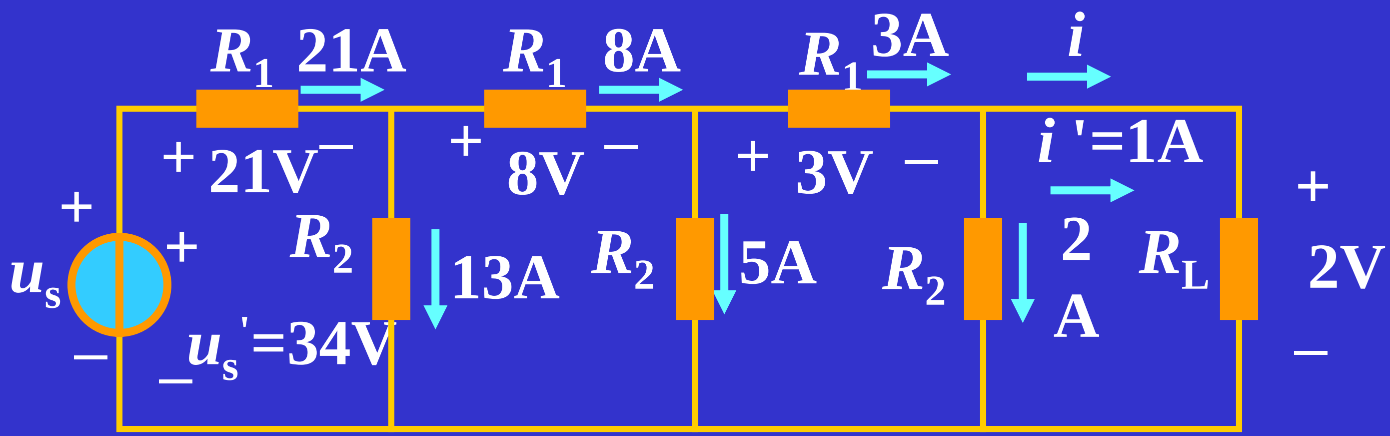
齐性定理:

线性电路中，所有激励(独立源)*都*增大(或减小)*同样*的倍数，则电路中响应(电压或电流)也增大(或减小)同样的倍数。

当只有一个激励时，则响应与激励成正比。

5. 齐性原理（homogeneity property)

例6. R_L=2Ω R_1=1 Ω R_2=1 Ω u_s=51V 求电流 i 。



解 采用倒推法（从右向左）：设i'=1A。

则 $$\frac{i}{i'}=\frac{u_s}{u_s'}$$ 即 $$i=\frac{u_s}{u_s'}i'=\frac{51}{34}\times 1=1.5A$$

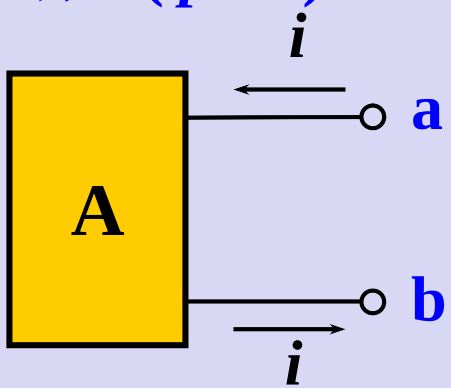
4.3 戴维宁定理和诺顿定理
(*Thevenin-Norton Theorem*)

工程实际中，常常碰到只需研究某一支路的电压、电流或功率的问题。对所研究的支路来说，电路的其余部分就成为一个有源二端网络，可等效变换为较简单的含源支路(电压源与电阻串联或电流源与电阻并联支路)，使分析和计算简化。戴维宁定理和诺顿定理正是给出了等效含源支路及其计算方法。

§4–2　戴维宁定理和诺顿定理

一、几个名词

(1) 端口(*port*)



端口指电路引出的一对端钮，其中从一个端钮(如a)流入的电流一定等于从另一端钮(如b)流出的电流。

(2) 一端口网络 (*network*) (亦称二端网络)

网络与外部电路只有一个端口 (或一对端钮)联接。

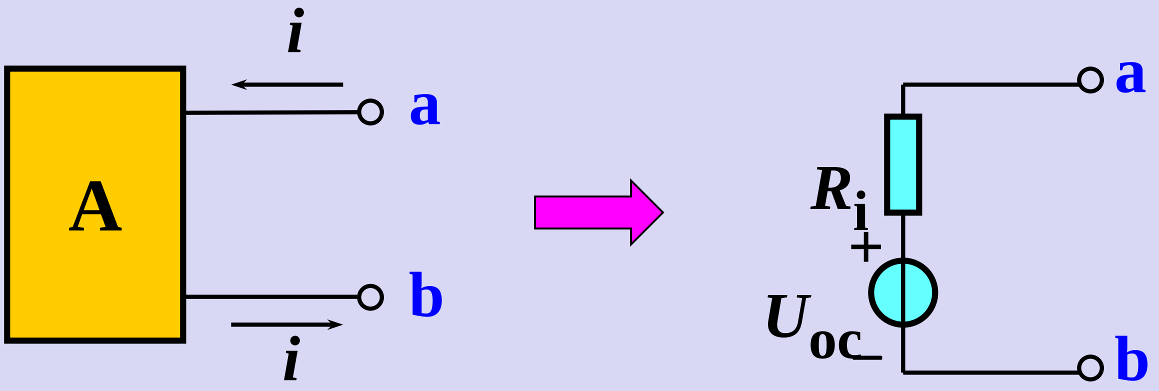
(3) 含源(active)与无源(passive)一端口网络

网络内部含有独立电源的一端口网络称为含源一端口网络。

网络内部不含有独立电源的一端口网络称为无源一端口网络。

二、戴维南定理

任何一个含有独立电源、线性电阻和线性受控源的二端网络，对外电路来说，可以用一个电压源(U_{oc})和电阻R_i的串联组合来等效置换；此电压源的电压等于一端口的开路电压，而电阻等于一端口中*全部独立电源置零*后的输入电阻。



注意：

(1) 戴维南等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压U_{oc}，电压源方向与所求开路电压方向有关。

(2) 串联电阻为将一端口网络内部独立电源全部置零(电压源短路，电流源开路)后，所得无源一端口网络的等效电阻。

等效电阻的计算方法：

1 当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联的方法计算；

2 加压求流法或加流求压法。

(3) 外电路发生改变时，含源一端口网络的等效电路不变。

(4) 当一端口内部含有受控源时，其控制量所在支路也必须包含在被化简的一端口中。

3. 定理的应用

(1) 开路电压U_{oc} 的计算

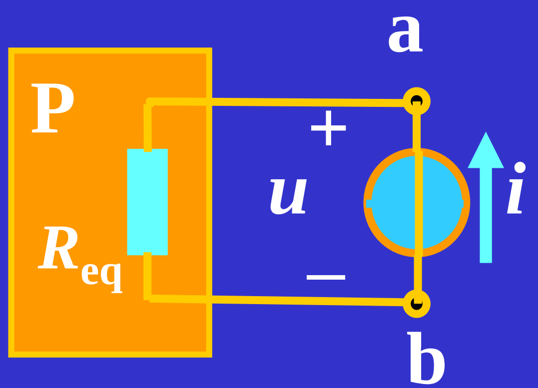
戴维宁等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压U_{oc}，电压源方向与所求开路电压方向有关。计算U_{oc}的方法视电路形式选择前面学过的任意方法，使易于计算。

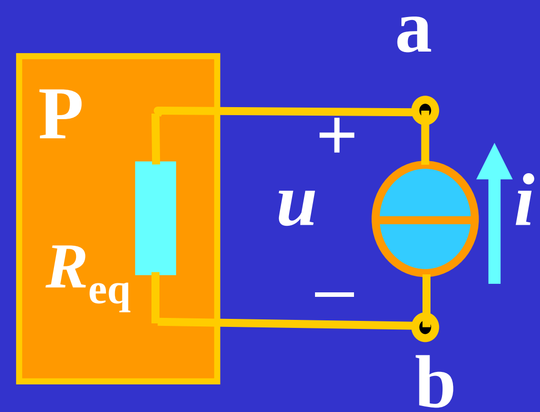
（2）等效电阻的计算

等效电阻为将一端口网络内部独立电源全部置零(电压源短路，电流源开路)后，所得无源一端口网络的输入电阻。常用下列方法计算：

① 当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联和△－Y互换的方法计算等效电阻；

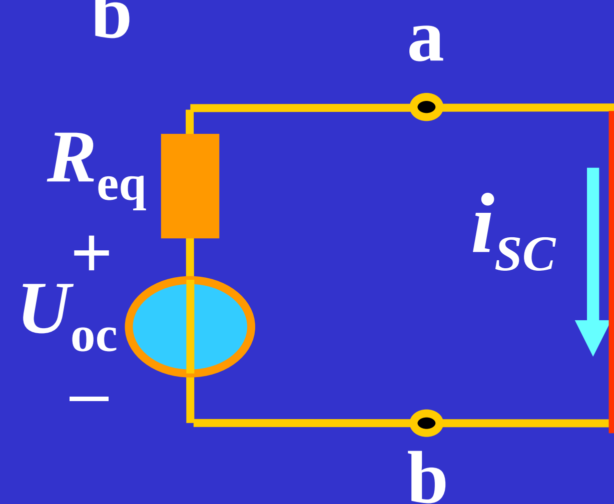
② 外加电源法（加压求流或加流求压）。





$$R_{eq}=\frac{u}{i}$$

③ 开路电压，短路电流法。



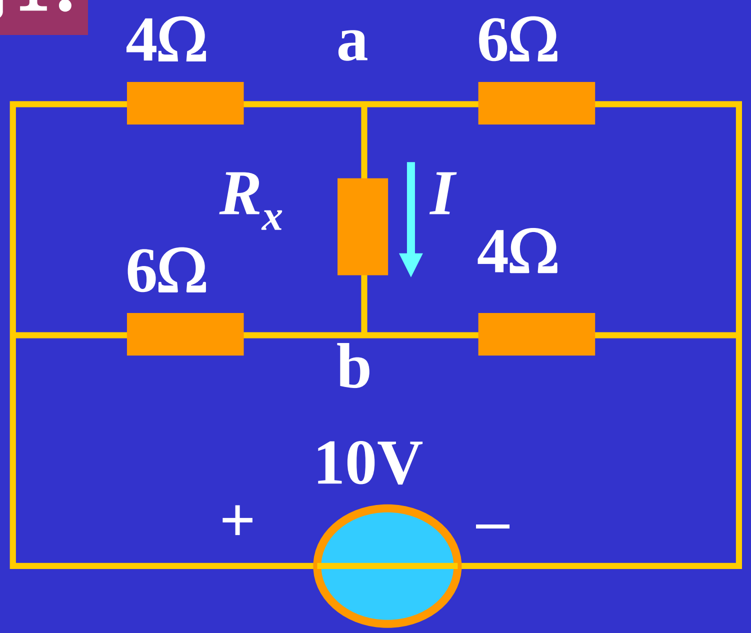
$$R_{eq}=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}$$

②③ 方法更有一般性。

注：（1）外电路可以是任意的线性或非线性电路，外电路发生改变时，含源一端口网络的等效电路不变(伏-安特性等效)。

（2）当一端口内部含有受控源时，控制电路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。

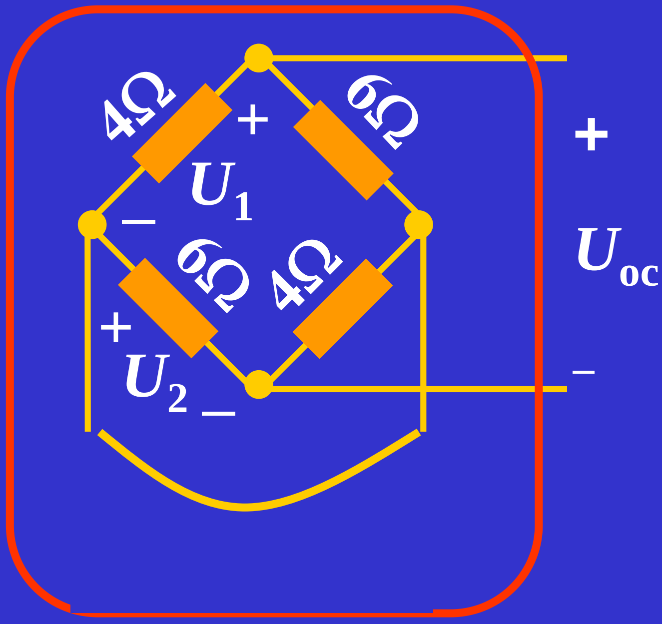
例1.



计算R_x分别为1.2Ω、 5.2Ω时的I；

解

保留R_x支路，将其余一端口网络化为戴维宁等效电路：

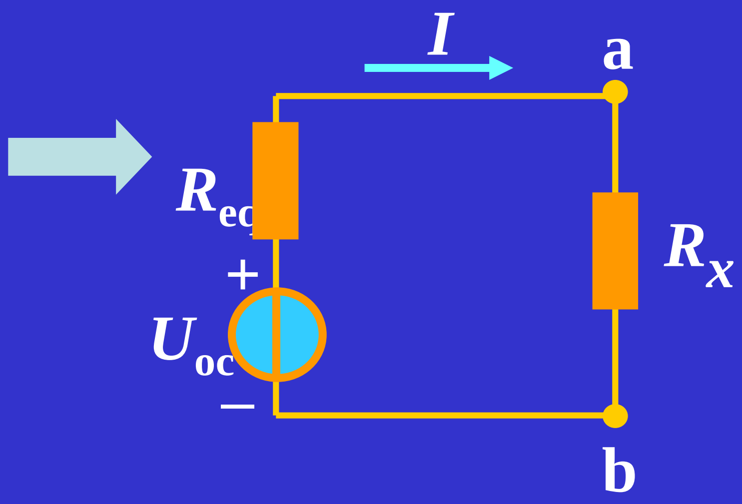


(1) 求开路电压

$$U_{oc} = U_1 + U_2$$
$$= -10\times4/(4+6)+10 \times 6/(4+6)$$
$$= -4+6=2\text{V}$$

(2) 求等效电阻R_{eq}

$$R_{eq}=4//6+6//4=4.8\Omega$$



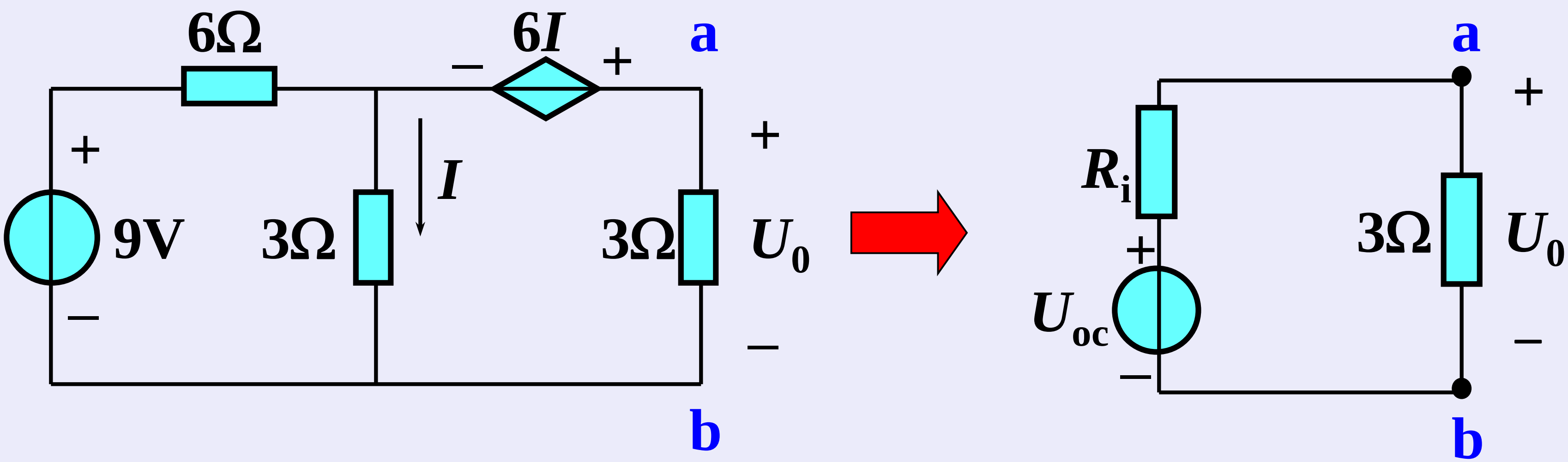
(3) R_x =1.2Ω时，

$$I= U_{oc} /(R_{eq} + R_x) =0.333\text{A}$$

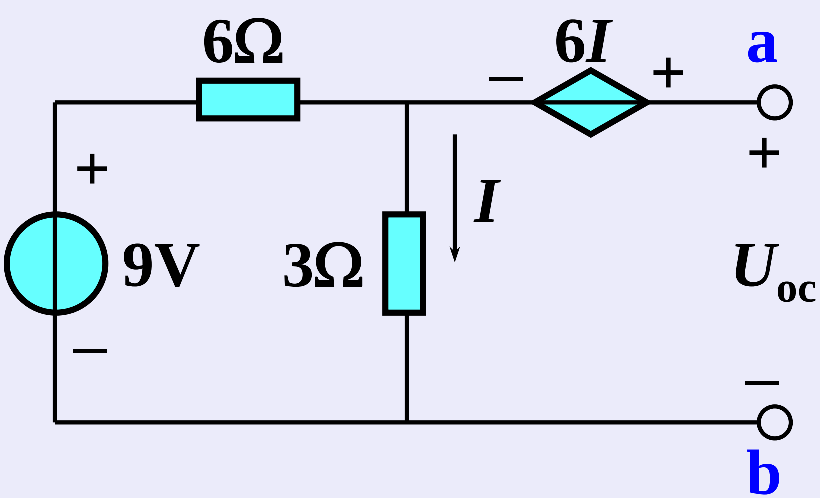
R_x =5.2Ω时，

$$I= U_{oc} /(R_{eq} + R_x) =0.2\text{A}$$

例7. 用戴维南定理求U_0。



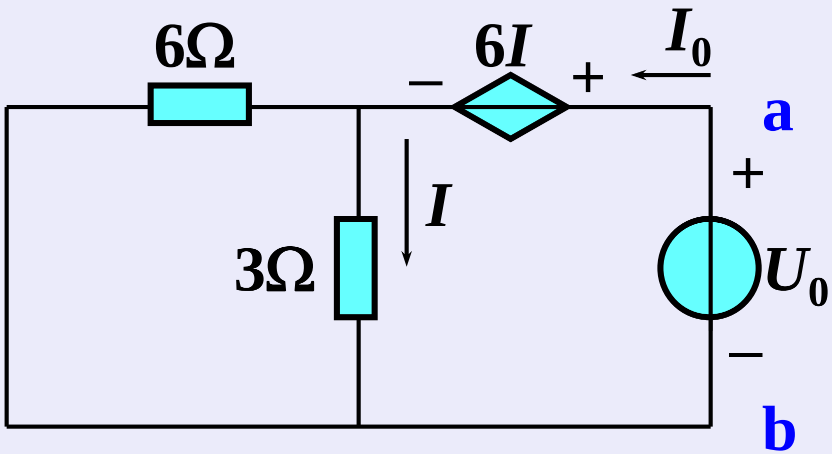
解： (1) 求开路电压U_{oc}



$$\begin{cases} U_{oc}=6I+3I \\ I=9/9=1\text{A} \end{cases} \Rightarrow U_{oc}=9\text{V}$$

(2) 求等效电阻R_i

方法：加压求流

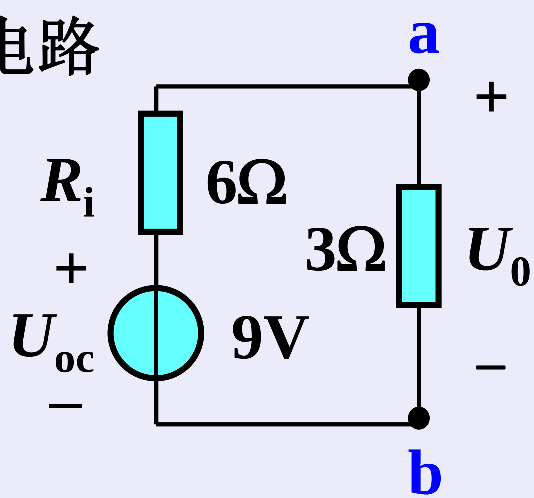


$$\begin{cases} U_0=6I+3I=9I \\ I=I_0\times 6/(6+3)=(2/3)I_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $U_0=9\times(2/3)I_0=6I_0$

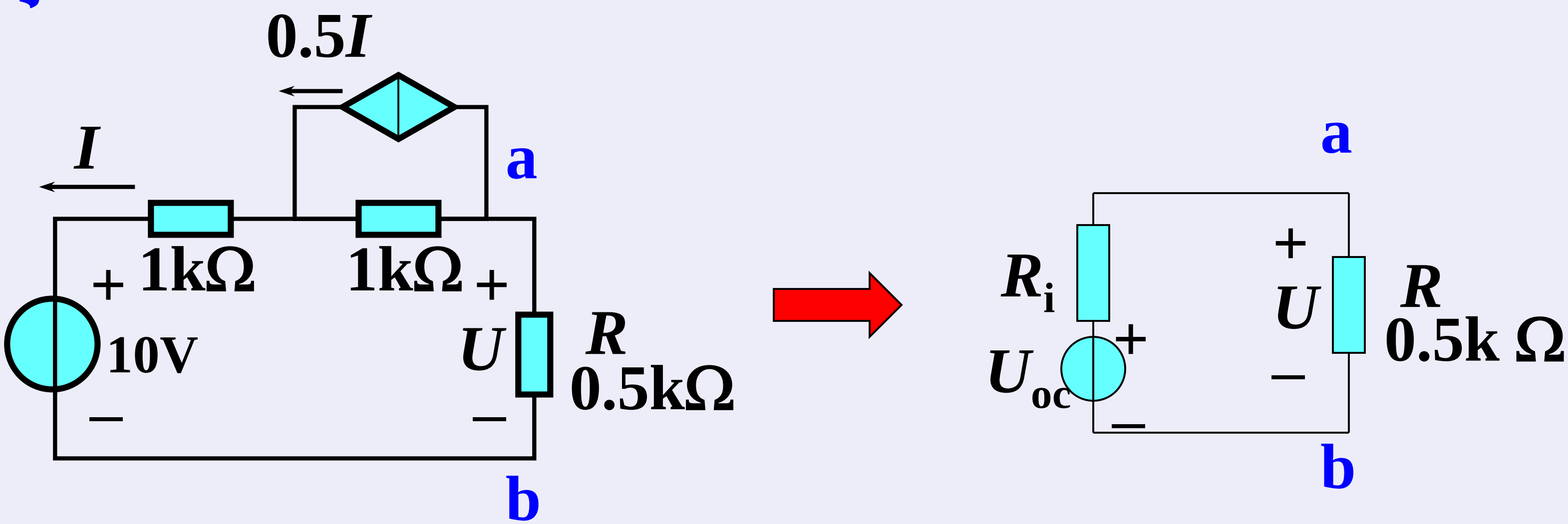
$\Rightarrow$ $R_i=U_0/I_0=6\ \Omega$

(3) 等效电路



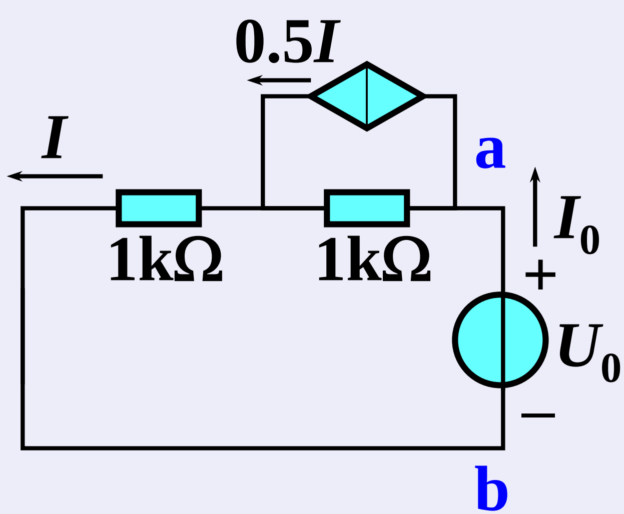
$$U_0=\frac{3}{6+3}\times 9=3\text{V}$$

例8. (含受控源电路)用戴维南定理求U。



解： (1) a、b开路，I=0，U_{oc}= 10V

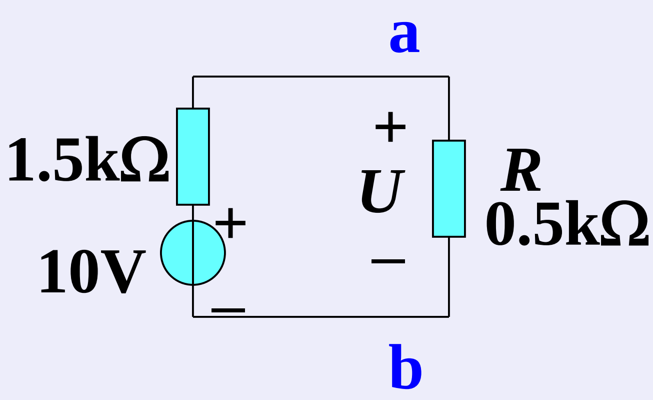
(2)求R_i：加压求流法



$$U_0 = (I_0 - 0.5\, I_0)\times 10^3 + I_0 \times 10^3 = 1500 I_0$$

$$R_i = U_0 / I_0 = 1.5\text{k}\Omega$$

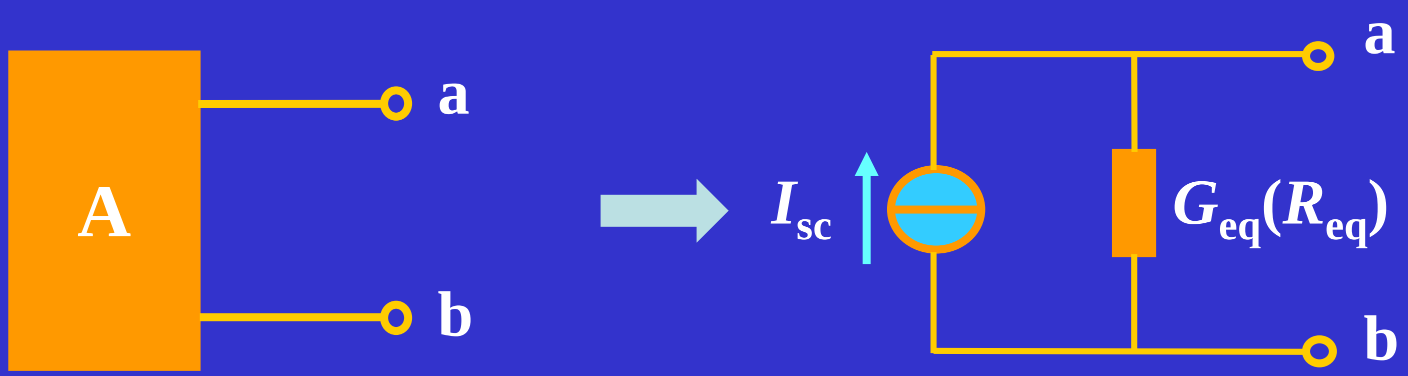
(3) 等效电路：



U=U_{oc} × 500/(1500+500)=2.5V

4. 诺顿定理

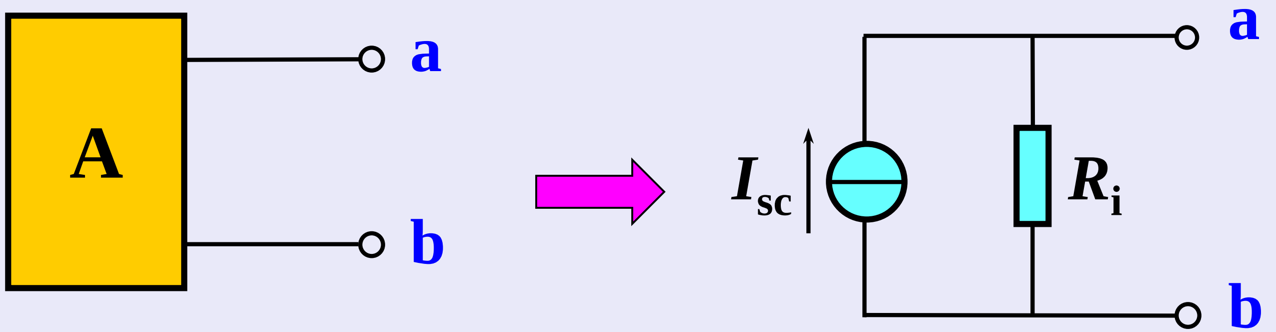
任何一个含源线性一端口电路，对外电路来说，可以用一个电流源和电导(电阻)的并联组合来等效置换；电流源的电流等于该一端口的短路电流，而电导(电阻)等于把该一端口的全部独立电源置零后的输入电导(电阻)。



诺顿等效电路可由戴维宁等效电路经电源等效变换得到。诺顿等效电路可采用与戴维宁定理类似的方法证明。证明过程从略。

三、诺顿定理

任何一个含独立电源，线性电阻和线性受控源的一端口，对外电路来说，可以用一个电流源和电阻的并联组合来等效置换；电流源的电流等于该一端口的短路电流，而电阻等于把该一端口的全部独立电源置零后的输入电阻。

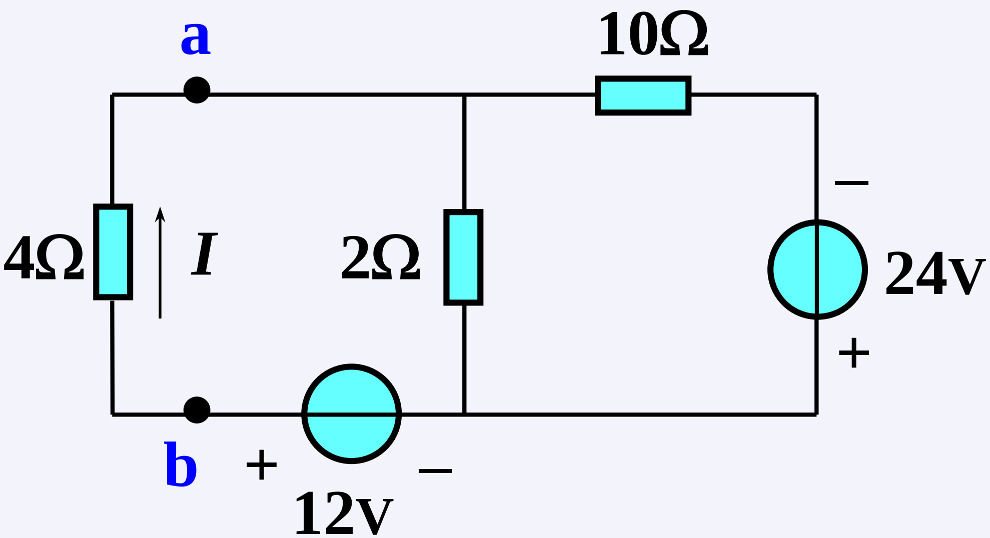


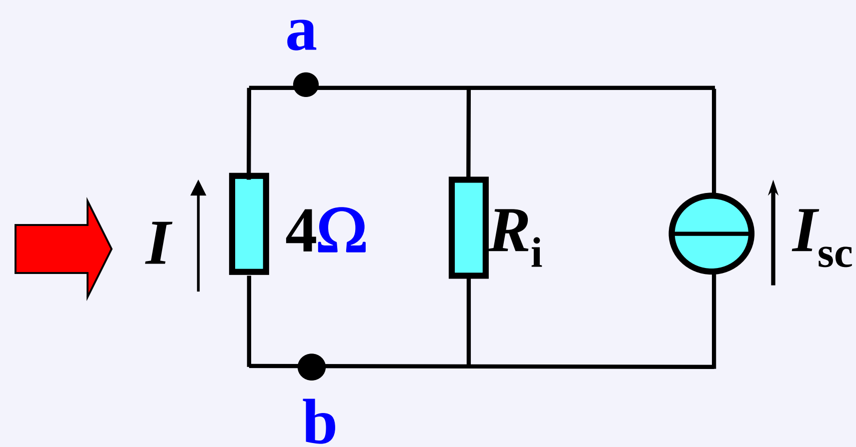
1. 三个参数：u_{oc}, i_{sc}, R_{eq}　　$R_{eq} = \dfrac{u_{oc}}{i_{sc}}$

2. 戴维南等效电路和诺顿等效电路统称为“一端口网络的等效发电机”。

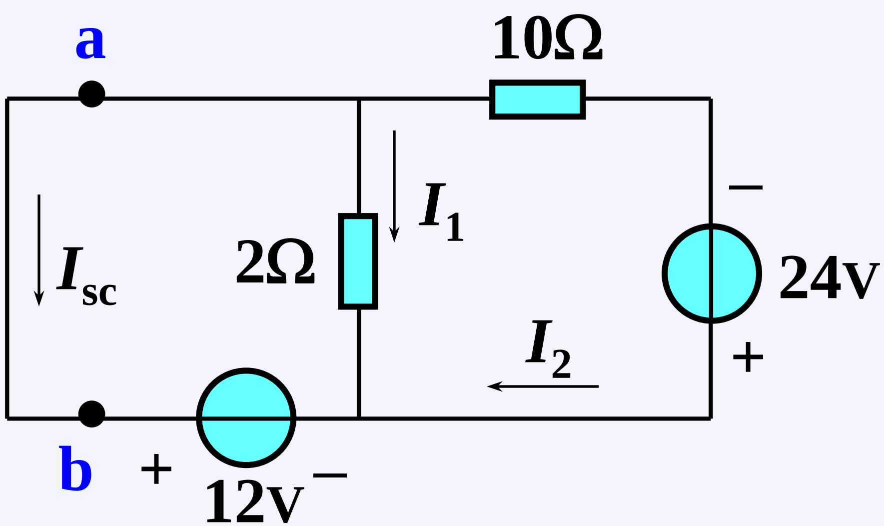
3. 在某些特殊的情况下，$R_{eq} = \infty$ 或$G_{eq} = 0$，只有诺顿等效电路，$R_{eq} = 0$ 或$G_{eq} = \infty$，只有戴维南等效电路。

例9. 求电流I 。





解: (1)求I_{sc}

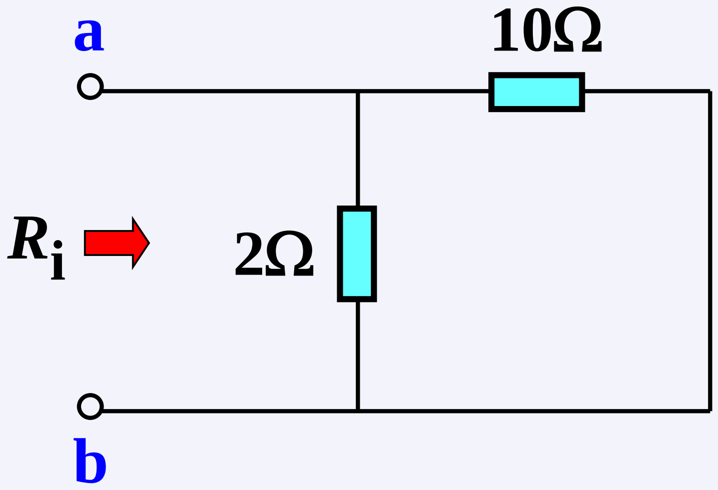


$$I_1 = 12/2 = 6\text{A}$$

$$I_2 = (24+12)/10 = 3.6\text{A}$$

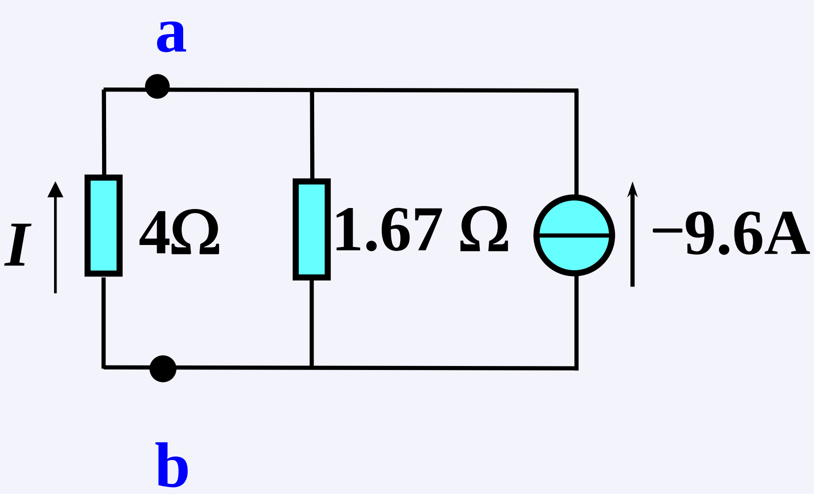
$$I_{sc} = -I_1 - I_2 = -3.6 - 6 = -9.6\text{A}$$

(2) 求R_i：串并联



$$R_i = 10 \times 2/(10+2) = 1.67\ \Omega$$

(3) 诺顿等效电路:



$$I = -I_{sc} \times 1.67/(4+1.67)$$

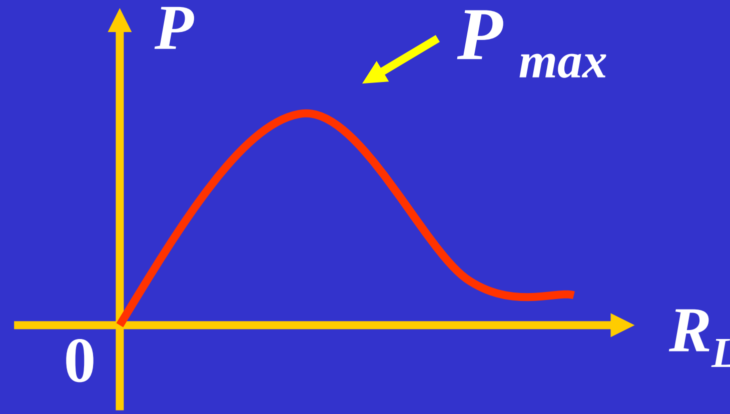
$$= 9.6 \times 1.67/5.67$$

$$= 2.83\text{A}$$

4.4 最大功率传输定理

一个含源线性一端口电路，当所接负载不同时，一端口电路传输给负载的功率就不同，讨论负载为何值时能从电路获取最大功率，及最大功率的值是多少的问题是有工程意义的。

$$P = R_L\left(\frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_L}\right)^2 \longrightarrow$$



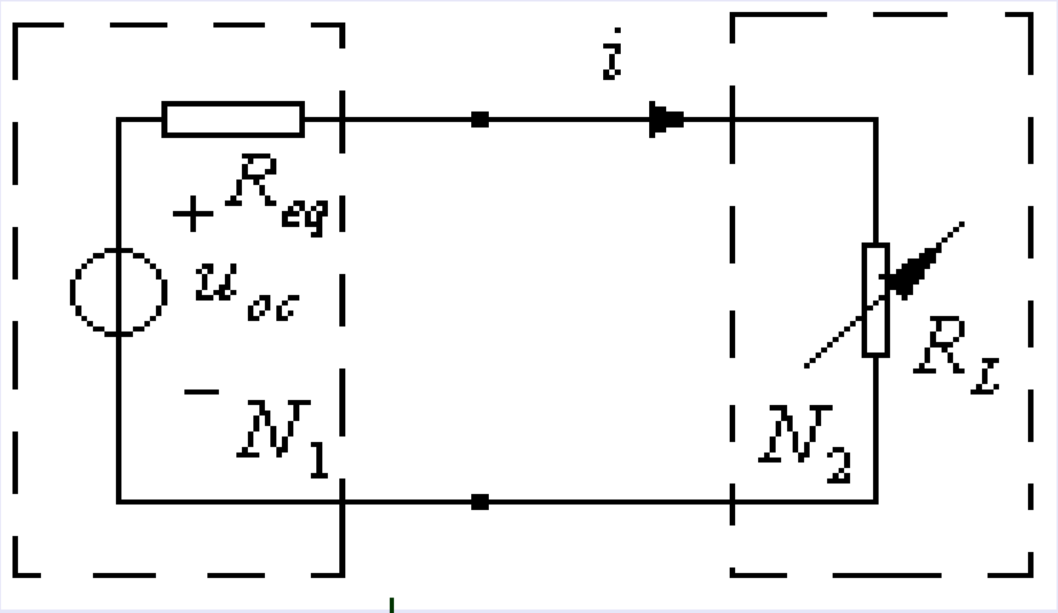
对P求导：

$$P' = u_{oc}^2 \frac{(R_{eq} + R_L)^2 - 2R_L(R_{eq} + R_L)}{(R_{eq} + R_L)^4} = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{R_L = R_{eq}} \longrightarrow \boxed{P_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}}$$

最大功率匹配条件

四、最大功率传输定理



$$p = i^2 R_L = \left(\frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_L}\right)^2 \times R_L$$

$$\frac{dp}{dR_L} = u_{oc}^2 \frac{R_{eq} - R_L}{(R_{eq} + R_L)^2} = 0$$

$$\therefore R_L = R_{eq}$$

$$\left.\frac{d^2 p}{dR_L^2}\right|_{R_L = R_{eq}} = -\frac{u_{oc}^2}{8R_{eq}^3} < 0$$

p取得极大值

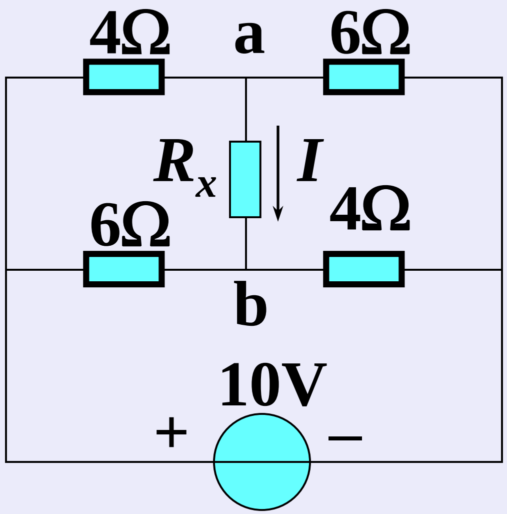
$$\boxed{P_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}}$$

用戴维南等效电路

$$\boxed{p_{\max} = \frac{i_{sc}^2 R_{eq}}{4}}$$

用诺顿等效电路

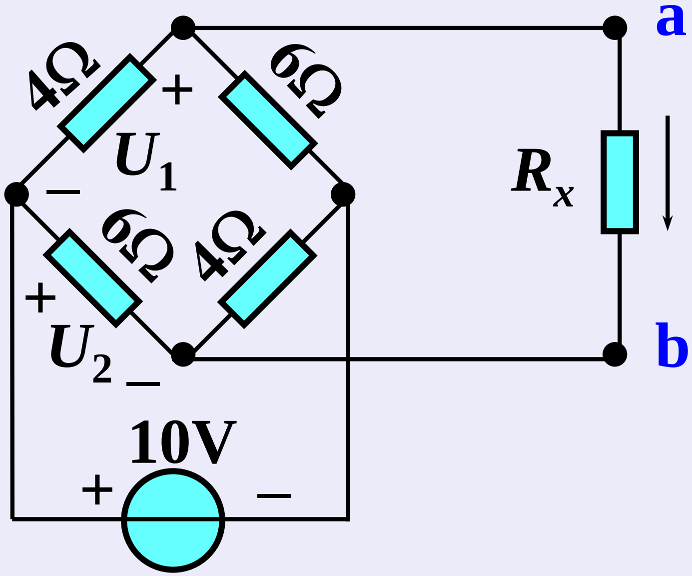
例10.

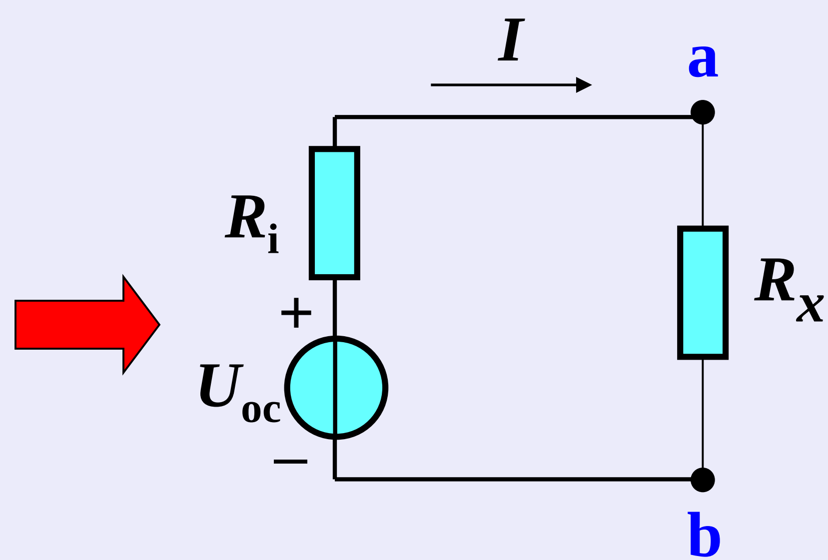


(1) 计算R_x分别为1.2Ω、5.2Ω时的I；

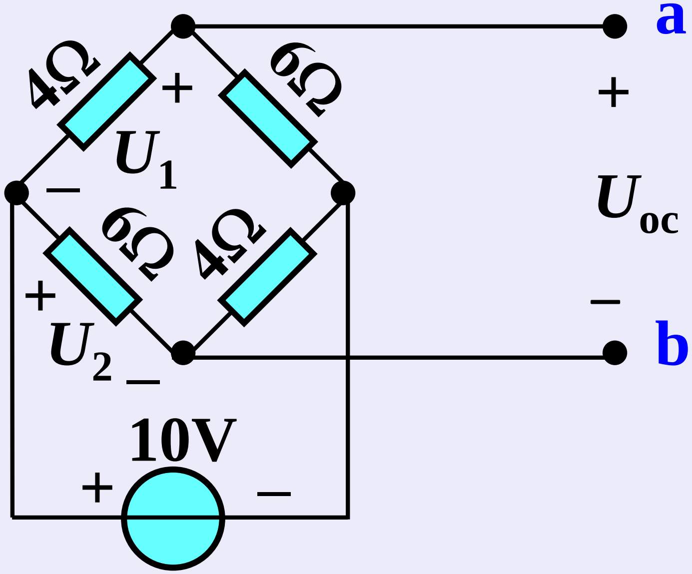
(2) R_x为何值时，其上获最大功率？

解： 保留R_x支路，将其余一端口网络化为戴维南等效电路：



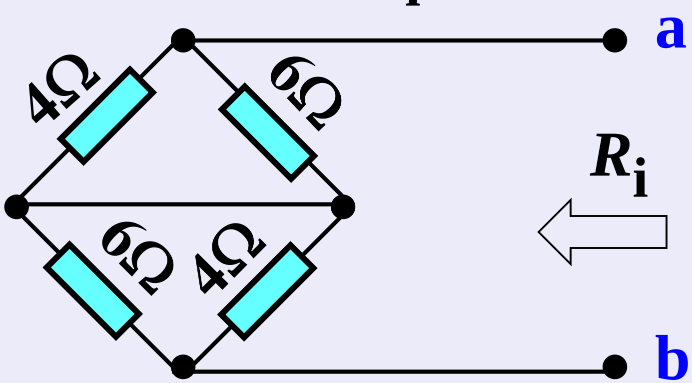


(1) 求开路电压



$$U_{oc} = U_1 + U_2$$
$$= -10\times4/(4+6)+10\times6/(4+6)$$
$$= -4+6=2\text{V}$$

(2) 求等效电阻R_i



R_i=4//6+6//4=4.8Ω

(3) R_x =1.2Ω时，

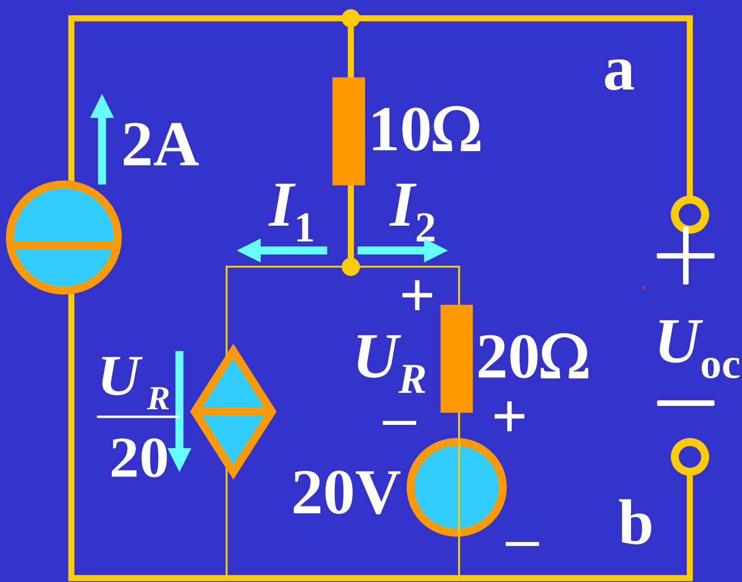
$I = U_{oc}/(R_i + R_x) = 2/6 = 0.333\text{A}$

R_x =5.2Ω时，

$I = U_{oc}/(R_i + R_x) = 2/10 = 0.2\text{A}$

$R_x = R_i$ =4.8Ω时，其上获最大功率。

例 R_L为何值时其上获得最大功率，并求最大功率。



(1) 求开路电压U_{oc}

$$I_1 = I_2 = U_R/20 \qquad I_1 + I_2 = 2A$$

$$\longrightarrow \quad I_1 = I_2 = 1A$$

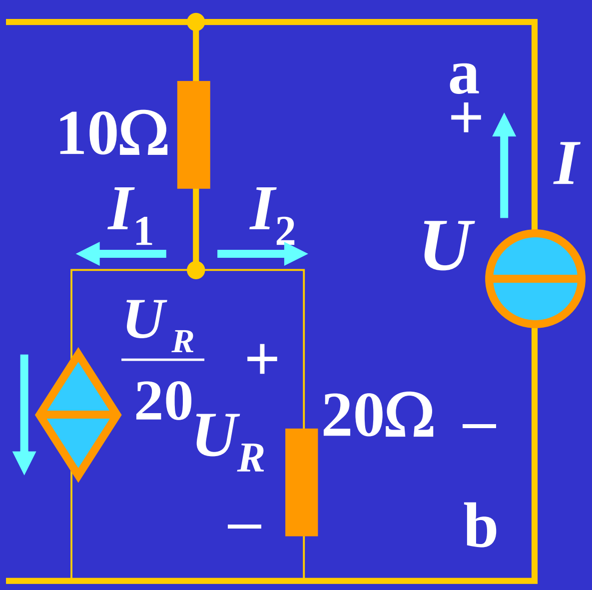
$$U_{oc} = 2\times10 + 20I_2 + 20 = 60V$$

(2) 求等效电阻R_{eq}

$$I_1 = I_2 = I/2$$

$$U = 10I + 20\times I/2 = 20I$$

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = 20\Omega$$



(3) 由最大功率传输定理得:

$$R_L = R_{eq} = 20\Omega$$ 时其上可获得最大功率

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{60^2}{4\times 20} = 45W$$

注 (1) 最大功率传输定理用于一端口电路给定，负载电阻可调的情况;

(2) 一端口等效电阻消耗的功率一般并不等于端口内部消耗的功率,因此当负载获取最大功率时,电路的传输效率并不一定是50%;

(3) 计算最大功率问题结合应用戴维宁定理或诺顿定理最方便.