第七章　一阶电路的时域分析

主要内容：

1. 动态电路的概念、方程及其初始条件

2. 一阶电路的时间常数

3.一阶电路的零输入响应　零状态响应　全响应

三要素法

§7-1　动态电路的方程及其初始条件

一、动态电路概述

1.1　电阻电路与动态电路

电阻电路：电路中仅由电阻元件和电源元件构成。KCL、KVL方程和元件特性均为代数方程。因此描述电路的方程为代数方程。

(即时电路)

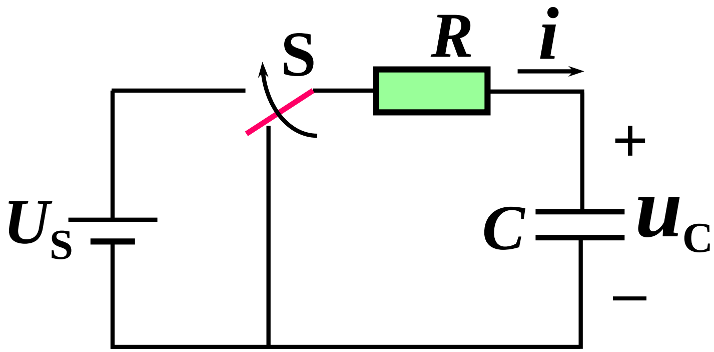
动态电路：含储能元件$L(M)$、C。KCL、KVL方程仍为代数方程，而元件方程中含微分或积分形式。因此描述电路的方程为微分方程。

(记忆电路)

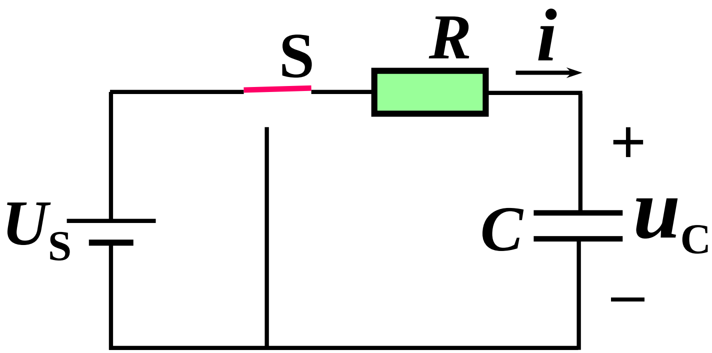
1.2 电路的过渡过程

稳定状态(稳态)

过渡状态(动态)



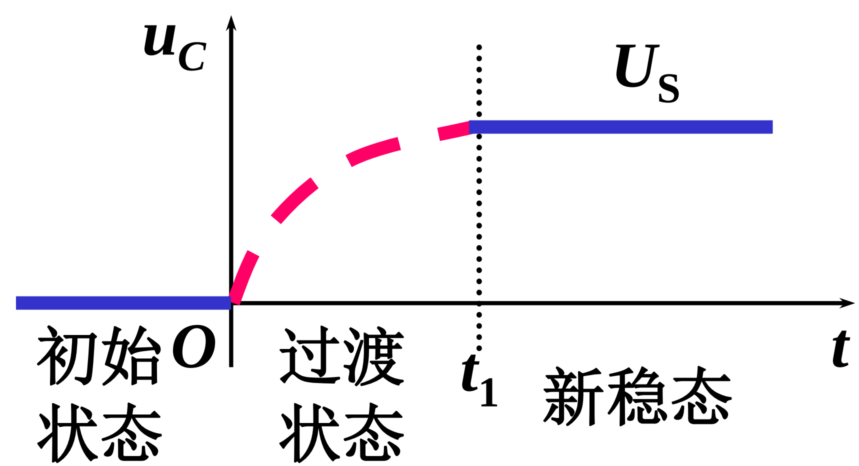
S未动作前　　$i = 0$,　$u_C = 0$



S接通电源后进入另一稳态

$i = 0$, $u_C = U_S$

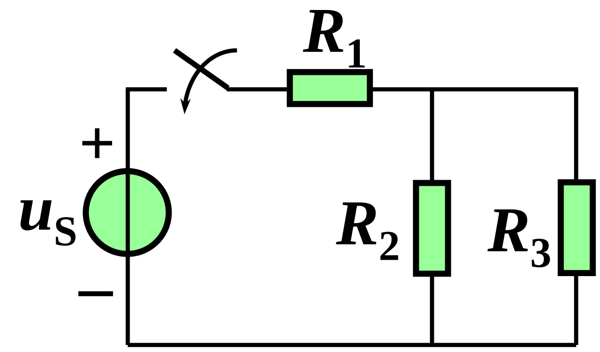
过渡过程：　电路由一个稳态过渡到另一个稳态需要经历的过程。



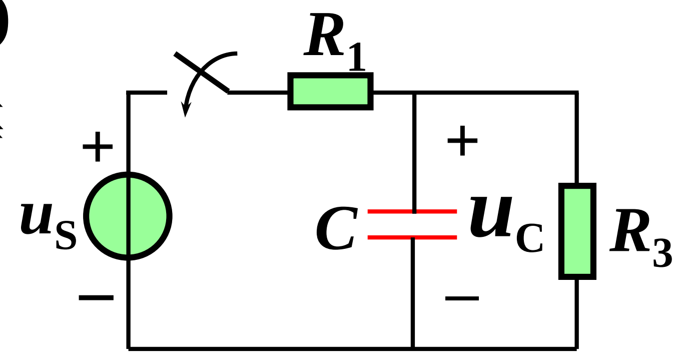
1.3　过渡过程产生的原因

1. 电路中含有储量元件(内因)

能量不能跃变　　$p = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$



2. 电路结构或电路参数发生变化(外因)

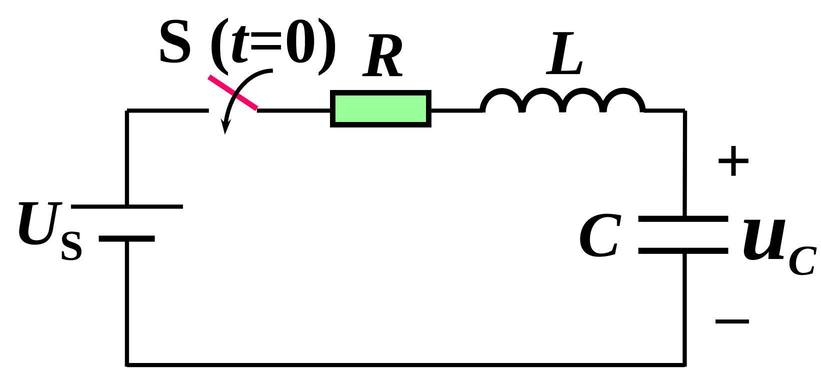


换路 $\begin{cases} \text{支路的接入、断开；开路、短路等} \\ \text{参数变化} \end{cases}$

1.4　分析方法

经典法　　　　时域分析法

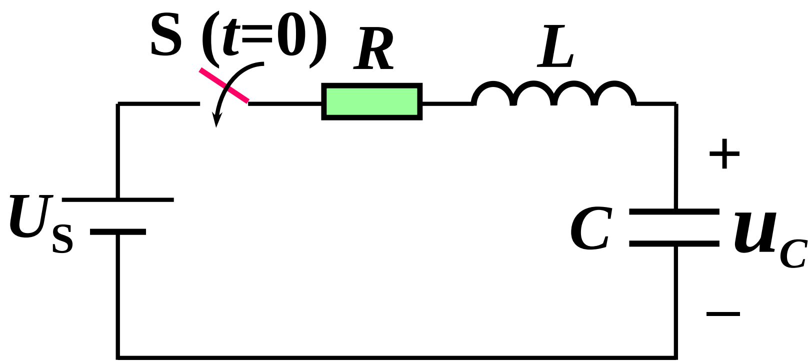
拉普拉斯变换法　频域分析法



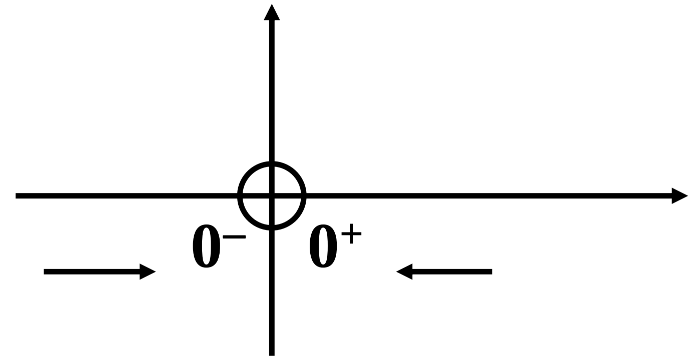
动态电路的阶数

二、电路中初始条件的确定

2.1 $t = 0_+$与$t = 0_$ 的概念



t=0时换路



$$\begin{cases} LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}+RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=U_S \quad (t>0) \\ \text{初始条件为 } t=0_+ \text{时} u\text{、}i \\ \text{及其各阶导数的值.} \end{cases}$$

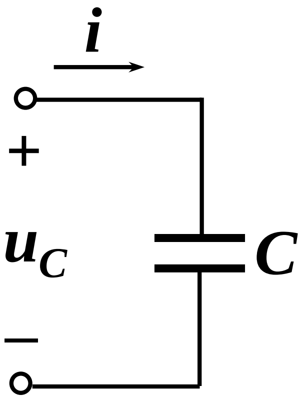
$$\begin{cases} t=0\_ & t=0\text{的前一瞬间} \\ t=0 & \text{换路瞬间} \\ t=0_+ & t=0\text{的后一瞬间} \end{cases}$$

$$f(0_-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t) \qquad f(0_+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$

$t = t_0$换路：

$t = t_{0-}$： t_0的前一瞬间；$t = t_{0+}$： t_0的后一瞬间。

2.2 换路定则 (开闭定则)



A 电容的电荷和电压

$$q_C(t)=\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{0_-} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=q_C(0_-)+\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0_-} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$q_C=Cu_C$

当$t=0_+$时，

$$q_C(0_+)=q_C(0_-)+\int_{0_-}^{0_+} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

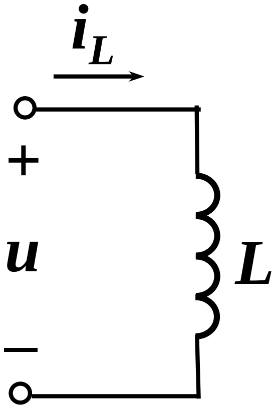
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当$i(t)$为有限值时， $\int_{0_-}^{0_+} i(\xi)\mathrm{d}\xi=0$

$$q_C(0_+)=q_C(0_-)$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)$$

B 电感的磁链和电流



$$\Psi_L(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{0_-}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{0_-}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\Psi_L(0_-)+\int_{0_-}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u=\frac{\mathrm{d}\Psi_L}{\mathrm{d}t}$$

$$\Psi_L=Li_L$$

$$\boxed{\begin{aligned}i_L(t)&=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0_-}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned}}$$

当$t=0_+$时，

$$\Psi_L(0_+)=\Psi_L(0_-)+\int_{0_-}^{0_+}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当$u(t)$为有限值时，$\int_{0_-}^{0_+}u(\xi)\mathrm{d}\xi=0$

$$\Psi_L(0_+)=\Psi_L(0_-)$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

小结：

(1) 一般情况下电容电流、电感电压均为有限值，换路定则成立。

换路定则：
$$\begin{cases} q_C(0_+) = q_C(0_-) \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_L(0_+) = \psi_L(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

(2) 换路定则是建立在能量不能突变的基础上.

$$W_C = \frac{1}{2}Cu_C^2 \qquad W_L = \frac{1}{2}Li_L^2$$

2.3 电路初始条件的确定

独立初始条件 $u_C(0_+)$ $i_L(0_+)$

非独立初始条件 电阻电压或电流、电容电流、电感电压

求初始值的一般方法：

(1) 由换路前电路求$u_c(0_-)$和$i_L(0_-)$；

(2) 由换路定则，得$u_C(0_+)$和$i_L(0_+)$；

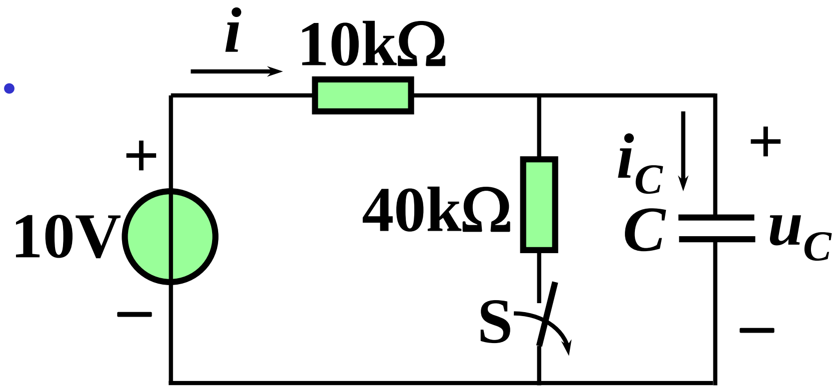
(3) 作0_+等效电路：

电容用电压为$u_C(0_+)$的电压源替代；

电感用电流为$i_L(0_+)$的电流源替代。

(4) 由0^+电路求所需的$u(0_+)$、$i(0_+)$，即非独立初始条件。

例6-1.



$t = 0$时打开开关S.

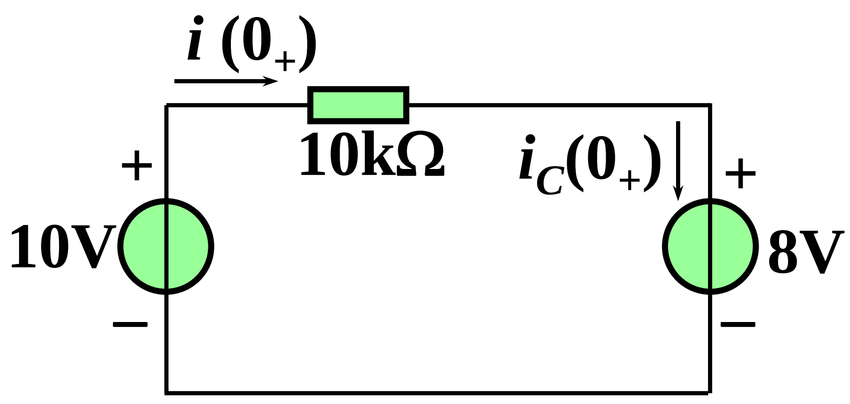
求 $u_C(0_+)$,$i_C(0_+)$.

解：

$$u_C(0_-) = \frac{10\times 40}{10+40} = 8\text{V}$$

由换路定则： $u_C(0_+) = u_C(0_-)=8\text{V}$

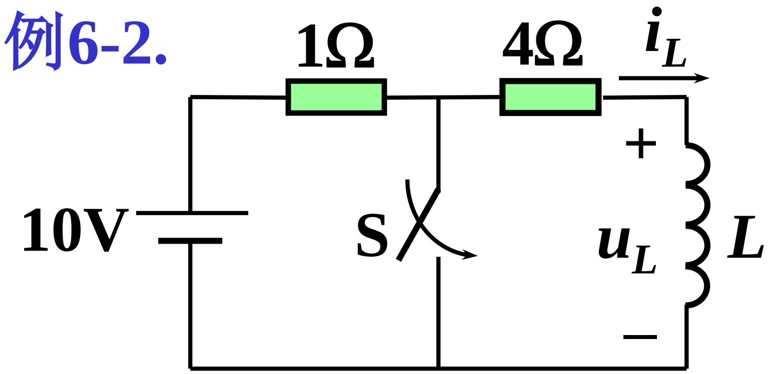
0_+等效电路：



$$i_C(0_+) = \frac{10-8}{10} = 0.2\text{mA}$$

$$i_c(0_+) \neq i_c(0_-) = 0$$

例6-2.

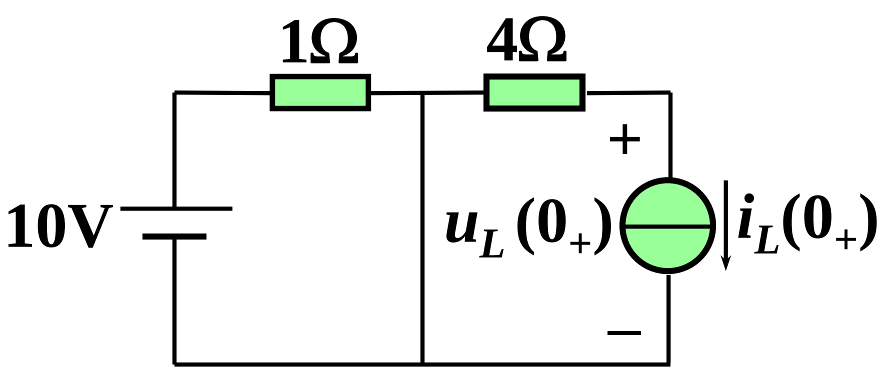


t = 0时闭合开关S.

求$u_L(0_+)$.

解： $i_L(0_+)= i_L(0_-)=2A$

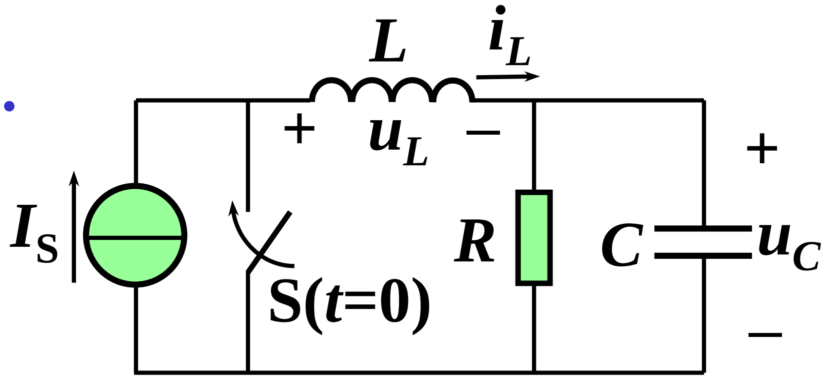
0_+等效电路：



$$u_L(0_+) = -2\times 4 = -8\text{V}$$

注意： $\because u_L(0_-) = 0 \quad \therefore u_L(0_+) = 0$

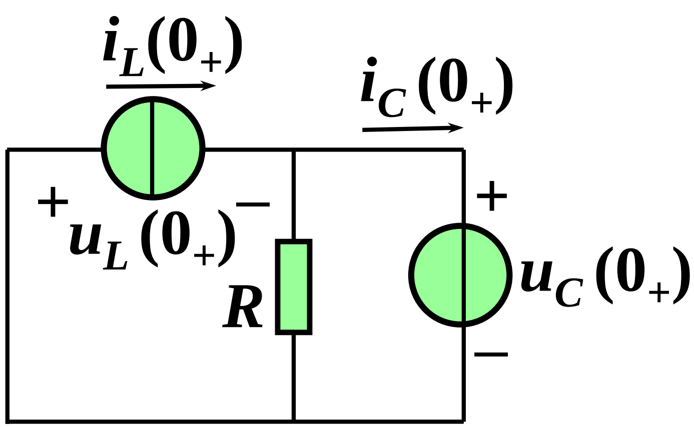
例6-3.



求 $i_C(0_+)$ ，$u_L(0_+)$.

解: $i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_S$ $\quad u_C(0_+)=u_C(0_-)=RI_S$

0+电路:



$$u_L(0_+)=-u_C(0_+)=-RI_S$$

$$i_C(0_+)=i_L(0_+)-u_C(0_+)/R$$

$$=I_S-I_S$$

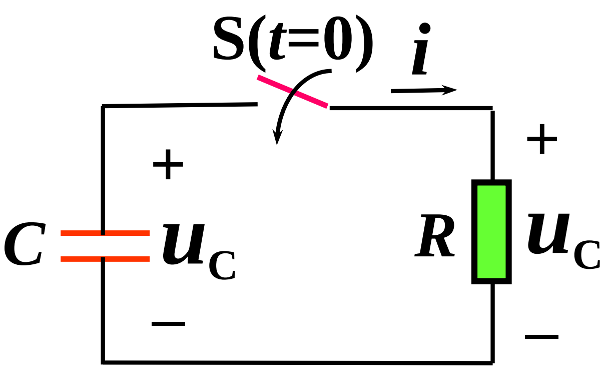
$$=0$$

§7–2 一阶电路的零输入响应

零输入响应(Zero–input response)

激励(电源)为零，由初始储能引起的响应。

一、RC电路的零输入响应



$u_C(0_-)=U_0$

$$i=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad u_C+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0$$

通解形式 $u_C(t)=A\mathrm{e}^{pt}$ 代入上式，求得：

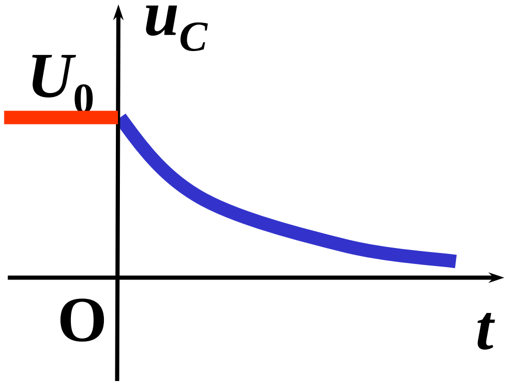
特征方程 $RCp+1=0$ $\qquad \therefore P=-\frac{1}{RC}$

$$u_C=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

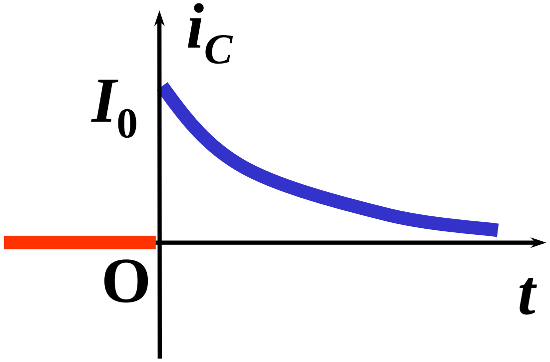
起始值　$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$

$$U_0 = Ae^{-\frac{1}{RC}t}\Big|_{t=0} \quad \rightarrow A=U_0$$

$$\boxed{u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}} \quad (t \geq 0)$$



$$i_C = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$



令τ $=RC$, τ 具有时间的量纲，称τ 为时间常数.

(欧×法=欧×库/伏=欧×安×秒/伏=秒)

$$\boxed{\tau = -\frac{1}{p}}$$

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

讨论：

1．RC电路的零输入响应：换路瞬间，电容电压不变化，但电流发生跃变；

2. $t=0$ $u_C(0)=U_0e^0=U_0$

$t=\tau$ $u_C(\tau)=U_0e^{-1}=0.368U_0$

经过时间 τ ，总有

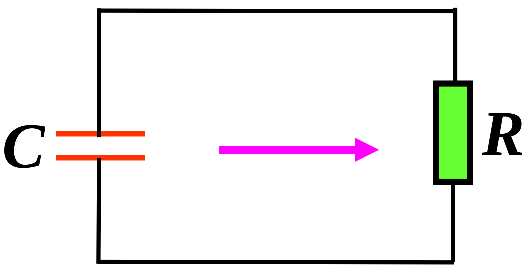
$$u_C(t_0+\tau)=U_0e^{-\frac{t_0+\tau}{\tau}}=u_C(t_0)\cdot e^{-1}=0.368u_C(t_0)$$

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$u_c=U_0e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.02U_0$	$0.007U_0$

从理论上讲 $t\to\infty$时,电路才能达到稳态. 单实际上一般认为经过$3\tau-5\tau$的时间, 过渡过程结束,电路已达到新的稳态.

3. $\tau = RC$ 可用改变电路的参数的办法加以调节或控制；

4.

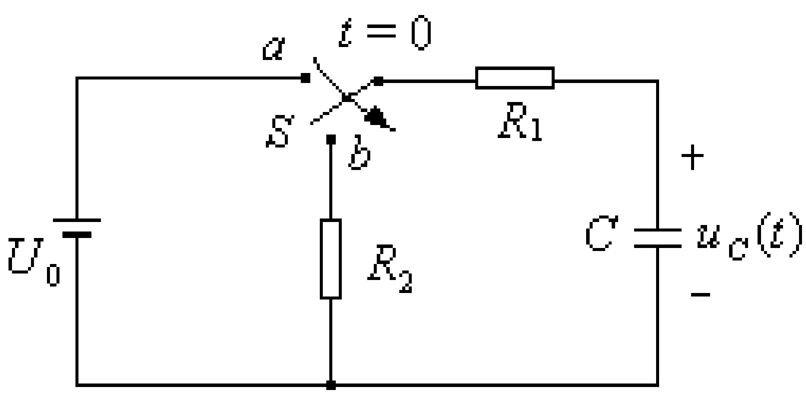


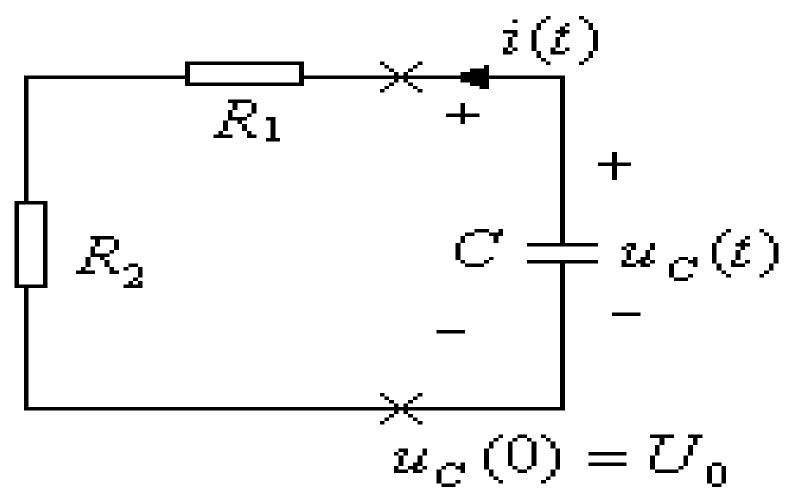
能量关系：

***C*的能量不断释放, 被*R*吸收, 直到全部储能消耗完毕.**

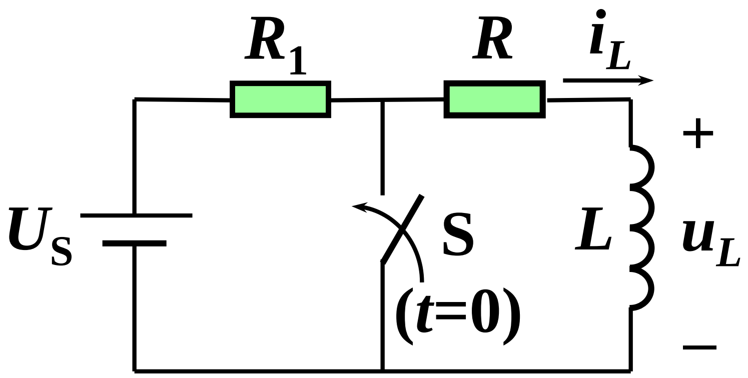
$$W_R = \int_0^\infty i^2 R\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_0^2$$

例6-4：





二、RL电路的零输入响应



$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{U_S}{R_1+R}=I_0$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=0 \qquad (t\geq 0)$$

通解形式为： $i(t)=A\mathrm{e}^{pt}$

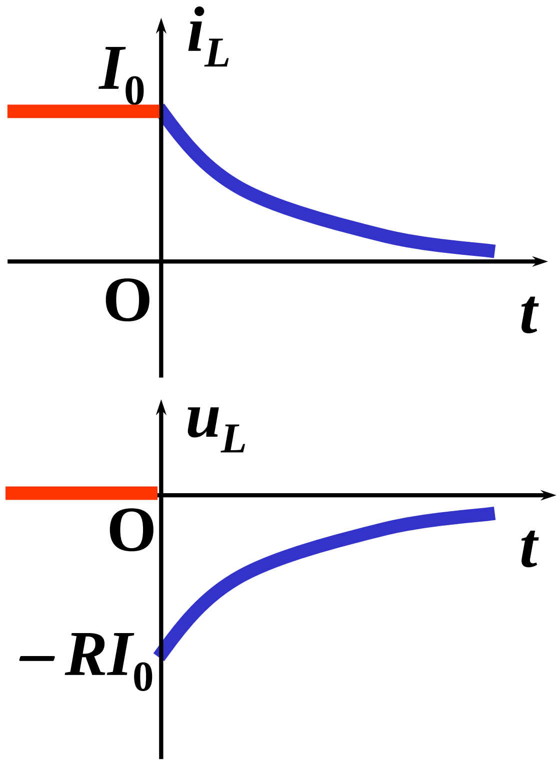
由特征方程 $Lp+R=0$ 得 $p=-\dfrac{R}{L}$

由初值 $i(0_+)=i(0\_)=I_0$ 得 $i(0_+)=A=I_0$

解答 $i_L(t)=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$ $(t\geq 0)$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$



(1) i_L, u_L 以同一指数规律衰减到零；

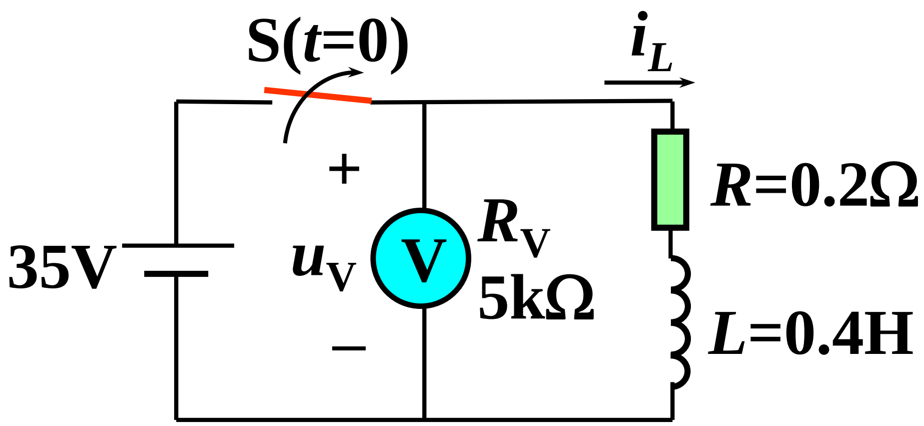
衰减快慢取决于L/R。

令$\tau = L/R$ —— RL电路的时间常数

$3\tau - 5\tau$ 过渡过程结束。

量纲：亨/欧=韦/安*欧=韦/伏=伏*秒/伏=秒

例6-5.



$i_L(0_+)=i_L(0_-)=35/0.2=175\ \text{A}=I_0$

$$\tau=\frac{L}{R+R_V}=\frac{0.4}{5000}=8\times10^{-5}\,\text{s}=80\mu\text{s}$$

$$i_L=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_V=-Ri_L=-R_V I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=-875\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ \text{kV}\qquad(t>0)$$

$u_V(0^+)=-875$ kV ！

现象：电压表烧坏！

小结：

1. 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应。

2. 一阶电路的零输入响应是一个指数衰减函数。

   衰减快慢取决于时间常数τ.

   *RC*电路 ： $\tau = RC$, *RL*电路： $\tau = L/R$

3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

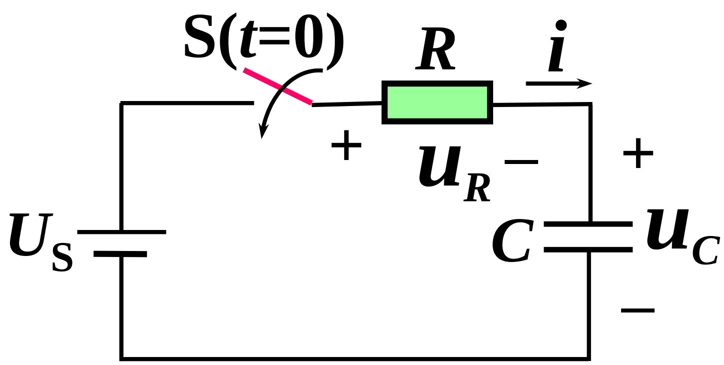
4. 一阶电路的零输入响应和初值成正比。

§7–3 一阶电路的零状态响应

零状态响应(Zero–state response)：

储能元件初始能量为零，在激励(电源)作用下产生的过渡过程

一、RC电路的零状态响应



$u_C(0_-)=0$

(1) 列方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

非齐次线性常微分方程

解答形式为：$u_C=u_C'+u_C''$

特解 通解

(2) 求特解 $u_C'=U_S$

强制分量 (稳态分量)

(3) 求齐次方程通解 u_C'' 自由分量(暂态分量)

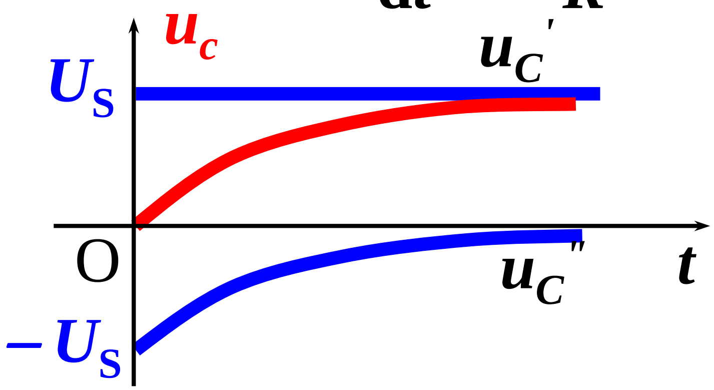
$$RC\frac{\mathrm{d}u_C''}{\mathrm{d}t}+u_C''=0 \qquad u_C''=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

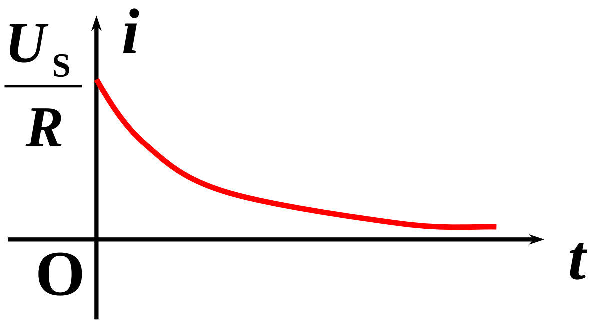
(4) 求全解 $u_C=u_C'+u_C''=U_S+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

(5) 定常数 $u_C(0_+)=A+U_S=0 \qquad \therefore A=-U_S$

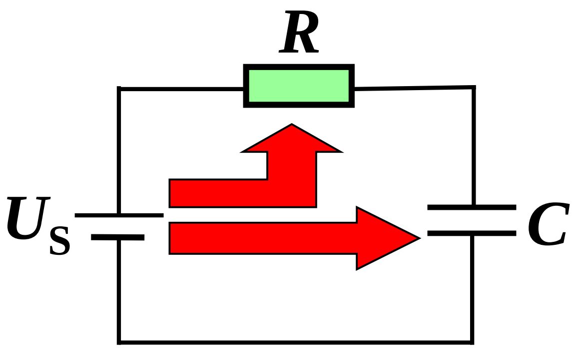
$$u_C=U_S-U_S\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t>0)$$

$$i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$





能量关系：



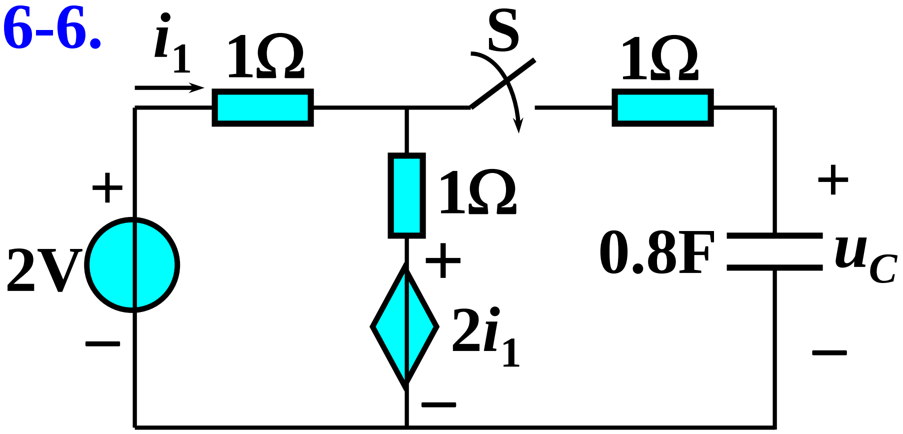
一部分储存在电容中，且W_C=W_R

$$W_R = \int_0^\infty p_R \mathrm{d}t = \int_0^\infty i^2 R\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 R\mathrm{d}t$$

$$= \frac{U_S^2}{R}\left(-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}CU_S^2\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}CU_S^2 = W_C$$

充电效率为50%

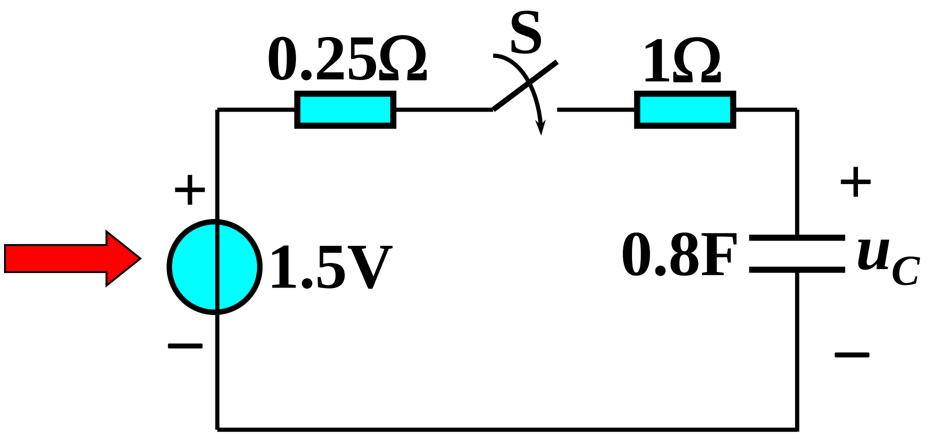
例6-6.



t= 0时闭合开关S.

求u_c的零状态响应。

戴维南等效.

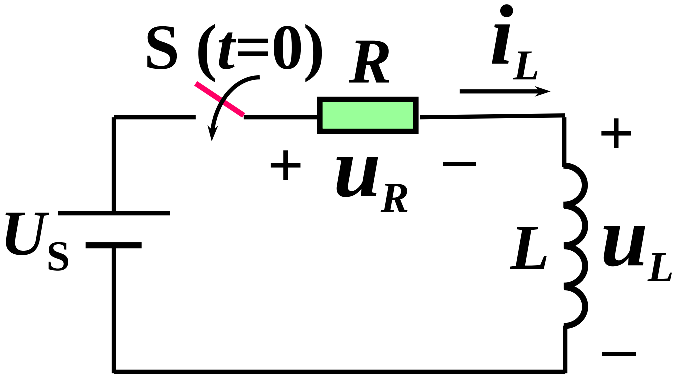


$$\tau = RC = (1+0.25)\times 0.8 = 1\,\text{s}$$

$$u_C'' = 1.5\,\text{V}$$

$$\boxed{u_C = 1.5 - 1.5\text{e}^{-t}\ \text{V} \quad (t>0)}$$

二、RL电路的零状态响应



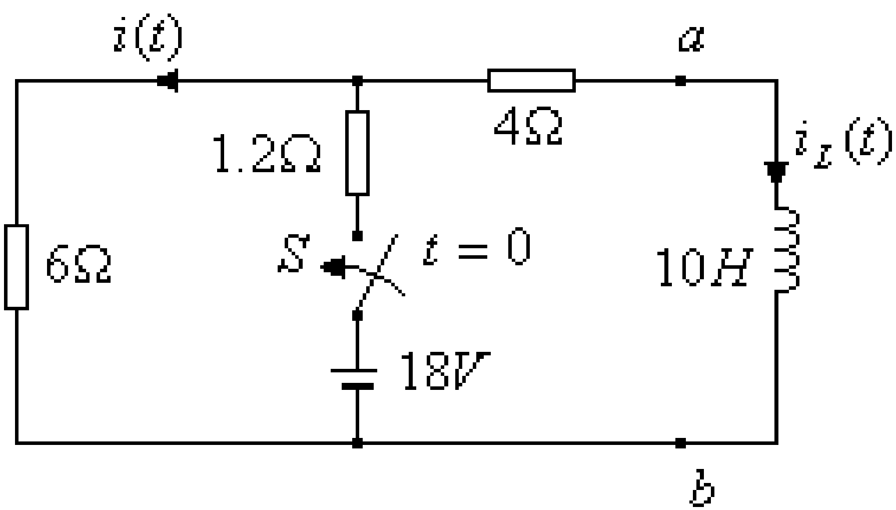
$i_L(0\_)=0$

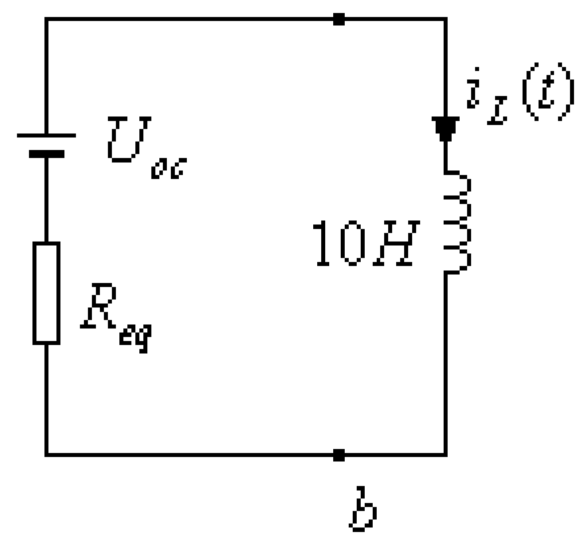
$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=U_S$$

$$i_L=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad (t\geq 0)$$

$$u_L=U_S e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (t\geq 0)$$

例6-7. 在下图所示电路中，$t=0$ 时，开关闭合，求 $i_L(t)$





小结：

1. 一阶电路的零状态响应是储能元件无初始储能，由输入激励引起的响应。

2. 时间常数τ与激励没有关系，仅取决于电路本身。

RC电路：$\tau = RC$，　RL电路：$\tau = L/R$

3. RC、RL电路，输入DC，贮能从无到有，逐步增长，所以，u_C，i_L 从零向某一稳态值增长，且为指数规律增长；

4. 当电路达到稳态时，电容相当于开路，而电感相当于短路，由此可确定电容电压或电感电流稳态值；

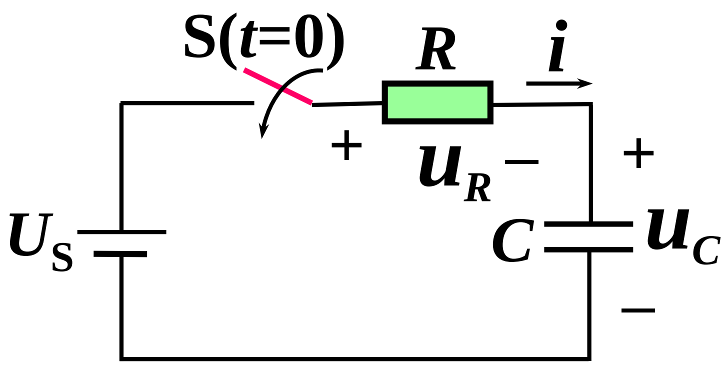
5. 一阶电路的零状态响应和激励成正比。

§7-4　一阶电路的全响应

全响应：非零初始状态的电路受到激励时电路中产生的响应。

一、一阶电路的全响应

以RC电路为例



$u_C(0_-)=U_0$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$ 非齐次方程

解答为　$u_C(t)=u_C'+u_C''$

$u_C'=U_S$　　$u_C''=Ae^{pt}$

$$u_C=U_S+Ae^{-\frac{t}{\tau}}\qquad \tau=RC$$

$u_C(0_+)=A+U_S=U_0$　　$\therefore A=U_0-U_S$

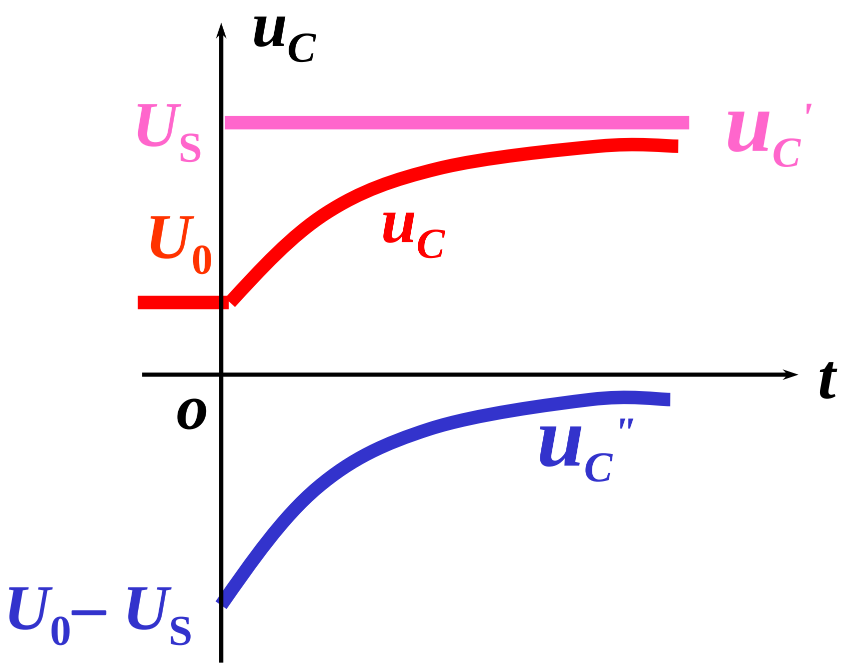
$$\therefore u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad (t>0)$$

二、一阶电路的全响应的两种分解方式

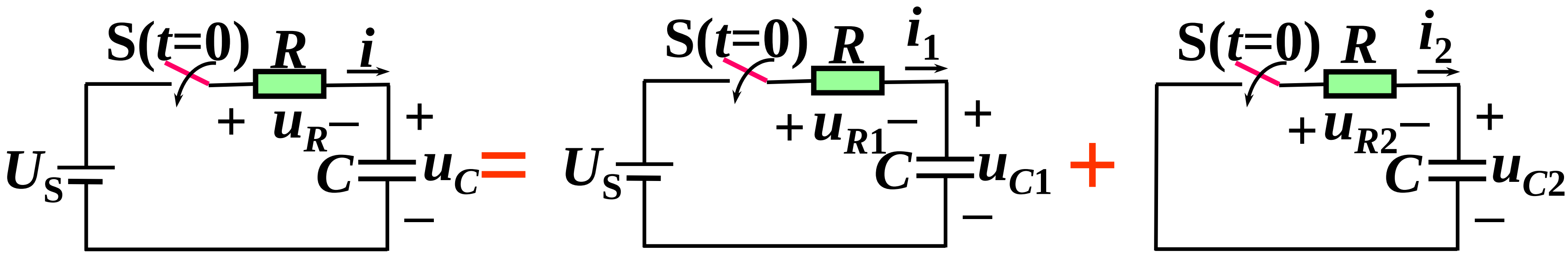
1 $$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

强制分量(稳态解)

自由分量(暂态解)



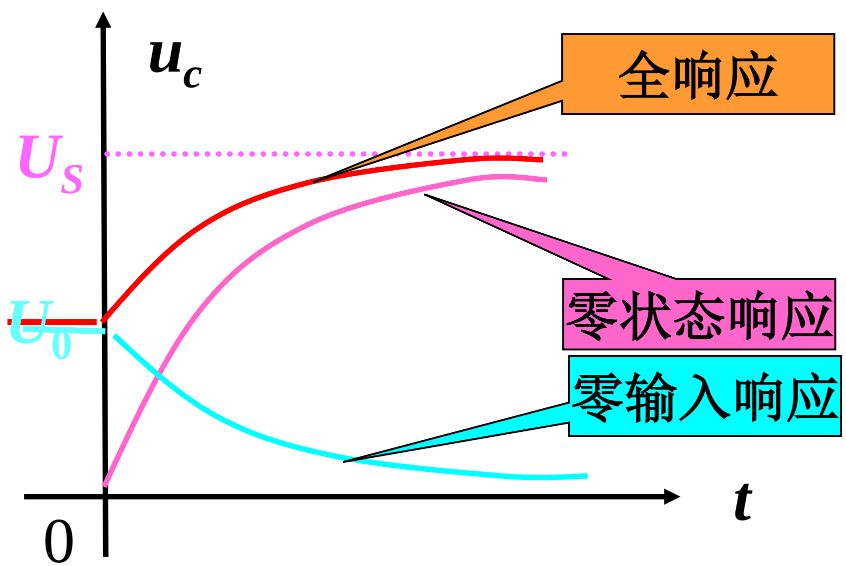
2. 全响应= 零状态响应 + 零输入响应



$u_C(0_-)=U_0$　　　　$u_{C1}(0_-)=0$　　　　$u_{C2}(0_-)=U_0$

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应　　　　零输入响应



小结：

1. 全响应的不同分解方法只是便于更好地理解过渡过程的本质；

2. 零输入响应与零状态响应的分解方法其本质是叠加，因此只适用于线性电路；

3. 零输入响应与零状态响应均满足齐性原理，但全响应不满足。

三、用三要素法分析一阶电路

仅适用于直流输入！！！

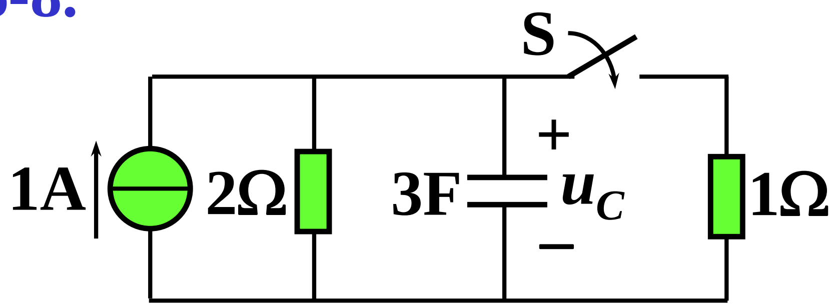
$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

$$u_C = U_C(\infty) + (U_C(0_+) - U_C(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{直流激励})$$

$$\text{三要素}\begin{cases} f(\infty) & \text{稳态解} \\ f(0_+) & \text{起始值} \\ \tau & \text{时间常数} \end{cases}$$

例6-8.



已知： t=0时合开关S。

求 换路后的$u_C(t)$ 。

解

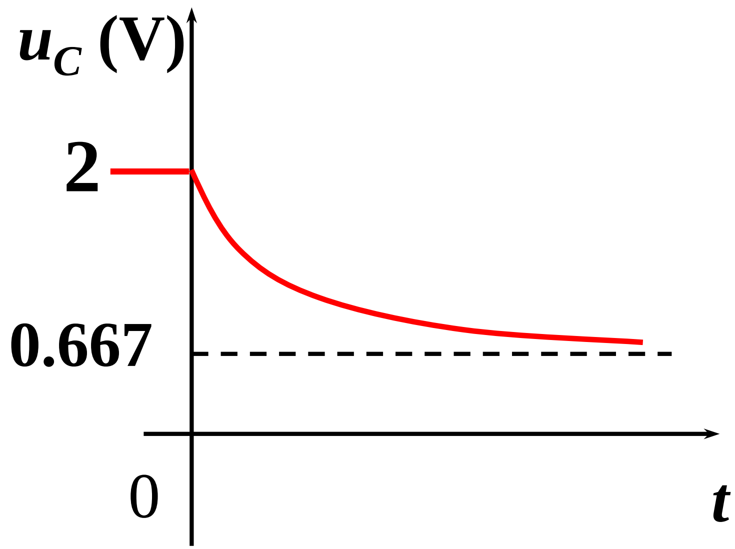
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$$

$$\tau = R_{等}C = \frac{2}{3}\times 3 = 2\ \text{s}$$

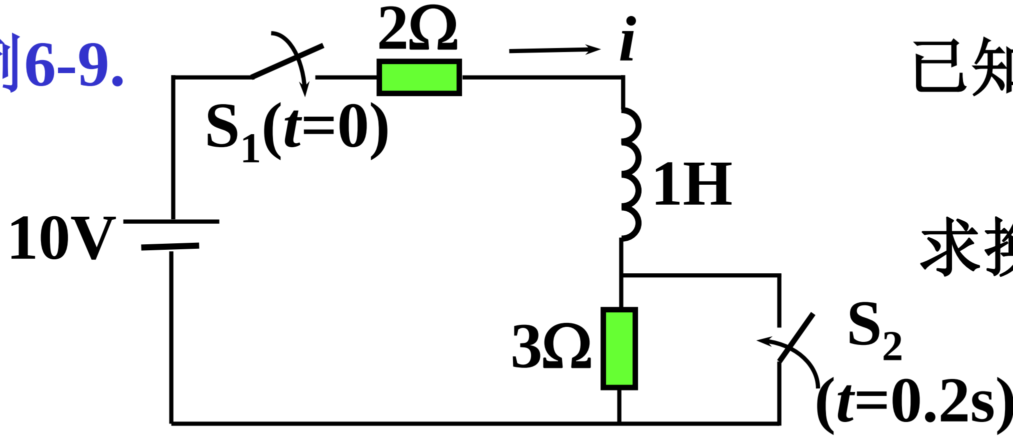
$$u_C(\infty) = \frac{2}{2+1}\times 1 = 0.667\text{V}$$

$$u_C = 0.667 + (2-0.667)e^{-0.5t}$$

$$= 0.667 + 1.33e^{-0.5t}\text{V} \quad (t \geq 0)$$



例6-9.



已知：电感无初始储能， $t=0$ 时合 S_1 , $t=0.2$s时合S_2。

求换路后的电感电流$i(t)$。

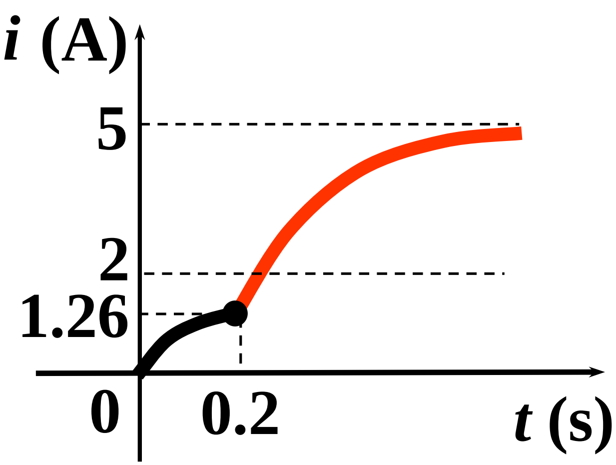
解

$0 < t < 0.2$s

$$i(0^+)=0 \quad \tau_1 = 0.2\ \mathrm{s}$$

$$i(\infty)=2\mathrm{A}$$

$$i(t)=2-2e^{-5t}\ \mathrm{A}$$



$t > 0.2$s

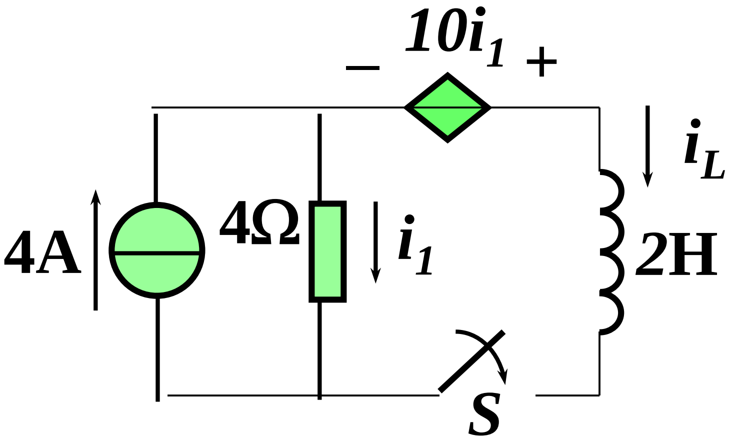
$$i(0.2^-)=2-2e^{-5\times0.2}=1.26\ \mathrm{A}$$

$$i(0.2^+)=1.26\ \mathrm{A}$$

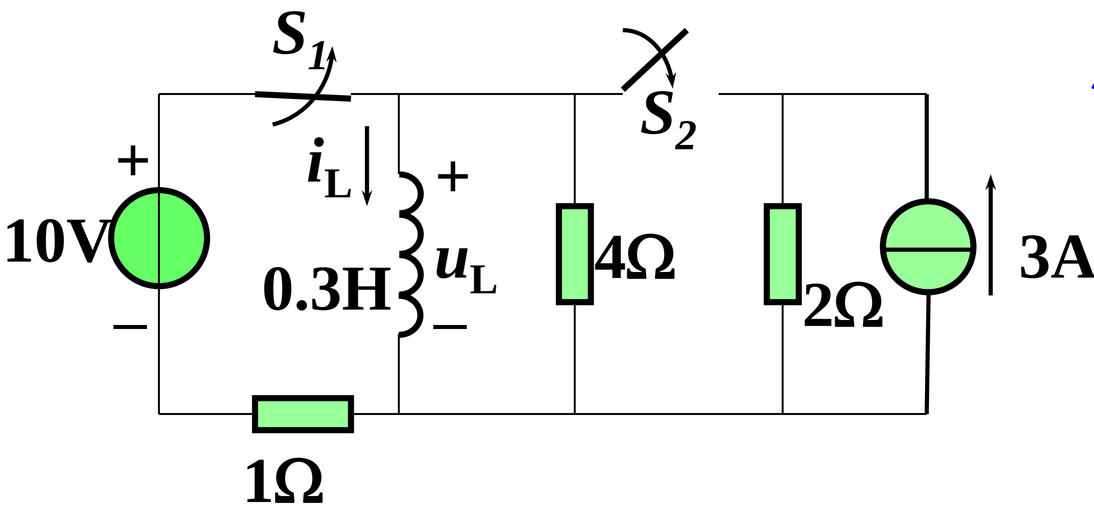
$$\tau_2 = 0.5\ \mathrm{s}$$

$$i(\infty)=5\ \mathrm{A}$$

$$i(t)=5-3.74e^{-2(t-0.2)}\ \mathrm{A}$$



例6-10、图示电路中开关原先打开，t=0时将开关S闭合，已知$i_L(0_-)=0$，求t>0时的电流$i_L(t)$。



例6-11、图示电路中，，t=0时将开关S_1打开，S_2闭合。开关动作前，电路已经达到稳定状态，求t>0时的$i_L(t)$，$u_L(t)$。